1.3 Newtonsche Axiome

- Philosophiae Naturalis Principia Mathematica, 1687
  (Mathematische Prinzipien der Naturlehre)
- Mathematische Präzisierung durch Euler

a) Lex prima: (Galileisches Trägheitsgesetz)

$$\boxed{\text{Jeder Körper verharrt im Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen Bewegung, wenn er nicht durch Kräfte gezwungen wird, seinen Zustand zu ändern.}} \quad (1.12)$$

- mathematische Form: $\underline{v} = \text{konst. für } \underline{F} = \underline{0}$
- Körper = Massepunkt (später: auch Schwerpunkt von Körpern)
- Gesetz definiert Inertialsysteme (IS) als spezielle BS,
  nur in ihnen gelten die Newtonschen Bewegungsgesetze

- Galileisches Relativitätsprinzip:

  **Verschiedene IS bewegen sich gleichförmig zueinander.
  Sie sind alle gleichwertig („Ruhe = gleichförmige Bewegung").**

  (siehe Kapitel 1.4)

- Nicht-Inertialsystem: rotierende BS, beschleunigte BS
  $\longrightarrow$ Scheinkräfte wie Zentrifugal-, Corioliskräfte
  $\longrightarrow$ Gesetze sind komplizierter

- Konstruktion von IS:
  im Weltraum mit Hilfe von drei senkrecht zueinander fliegenden, kräftefreien Raumschiffen/ Kometen/ geworfenen Körpern

b) Lex secunda:

Die Änderung der Bewegungsgröße ist der Einwirkung der bewegenden Kraft proportional und geschieht in Richtung der Kraft.	(1.13)

- Bewegungsgröße $\overbrace{=}^{\text{Newton}}$ Menge der Materie $\times \underline{v}$

  $\overbrace{=}^{\text{modern}}$ träge Masse $\times \underline{v}$

  $=$ Impuls $\boxed{\underline{p} = m\,\underline{v}}$ (1.14)

- mathematische Form (im IS): $\boxed{\underline{F} = \frac{d\underline{p}}{dt} = \frac{d(m\underline{v})}{dt}}$ (1.15)

  variierende Masse m : $\longrightarrow$ Raketenantrieb

- $m =$ konst. $\boxed{\rightarrow \underline{F} = m\,\underline{a}}$ (1.16)

  SRT: $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$!!! $m_0 \ldots$"Ruhemasse", $m = m_0$ für $v \ll c$

- 2 neue Größen mit intuitivem Verständnis:
  - Kraft $\underline{F}$: Muskelkraft, Schwerkraft, Federkraft, ...
    quantifizierbar durch z.B. Federn
  - träge Masse m : unterschiedlicher Widerstand bei Beschleunigung (vgl. Holz- und Eisenkugel gleicher Größe)
  - Präzisierung durch Gesetz: $\longrightarrow$ beide haben ihre Berechtigung

$$\left.\begin{array}{ll} 1.\; F = \text{konst.}, m \text{ variabel: messe} & m_1 a_1 = m_2 a_2 \rightarrow \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{m_2}{m_1} \\ 2.\; m = \text{konst.}, F \text{ variabel: messe} & \dfrac{F_1}{a_1} = \dfrac{F_2}{a_2} \rightarrow \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{F_1}{F_2} \end{array}\right\}$$

messe $a_1 / a_2 \longrightarrow$ Gesetz legt nur Verhältnisse fest

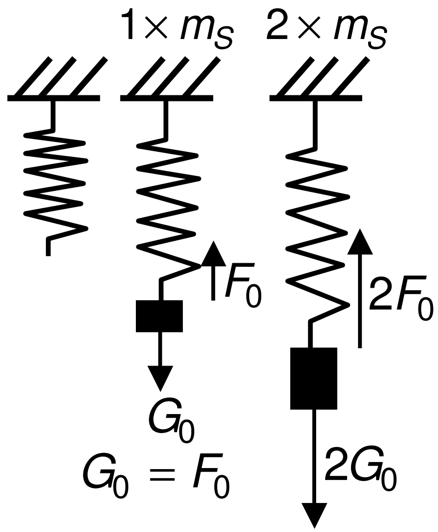
$$\Rightarrow \boxed{\text{Massendefinition: } 1\text{ kg} \quad \text{(Normalkörper aus Pt-Ir-Legierung in Sèvres)}} \tag{1.17}$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{Krafteinheit: } [F] = 1\,\text{kg}\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 1\,\text{N} = 1\,\text{Newton}} \tag{1.18}$$

- schwere Masse m_S :

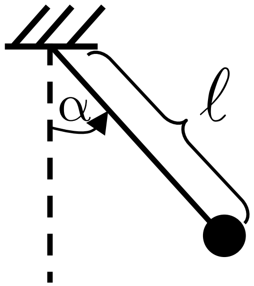
über Gewichtskraft $G = m_S\, g$ meßbar/bestimmt!

(g ... Erdbeschleunigung, zunächst beliebige Konstante)



Frage: Ist m_S weitere Eigenschaft eines Körpers (neben m) , etwa analog zur elektr. Ladung (bestimmt Kraft im elektr. Feld)?

Mache Pendelversuch:



$$\left.\begin{array}{r} \text{antreibende Kraft } (\alpha \ll 1):\ -m_S\, g\, \alpha \\ \text{Trägheit:}\quad m\,\ell\,\ddot{\alpha} \end{array}\right\}$$

Schwingungs-frequenz

$$\boxed{\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{m_S}{m}\frac{g}{\ell}}}$$

(s. Übung)

Messe ν für verschiedene Materialien und Massen

$\rightarrow\ m_S \propto m$ (g als freier Parameter!)

$\Rightarrow$ Setze: $\boxed{m_S = m}$ (1.19)

... „empirisch"

Genauigkeit: $10^{-10} - 10^{-12}$

(mit Drehwaage von Eötvös)

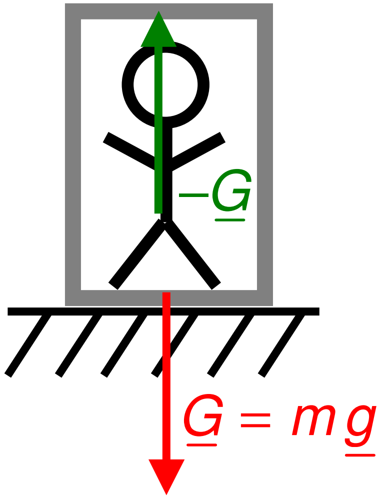
- ART:

schwaches Äquivalenzprinzip: $\boxed{m_S = m}$ (1.20)

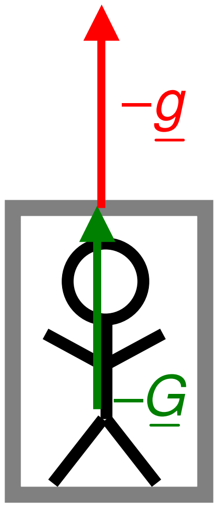
... „Axiom"

$\boxed{\longrightarrow \text{beschleunigte Systeme} \equiv \text{Gravitationsfeld}}$

Erde:



Weltall:



c) Lex tertia:

„actio = reactio"
Die Kräfte, die zwei Körper aufeinander ausüben, sind stets gleich und von entgegengesetzter Richtung:

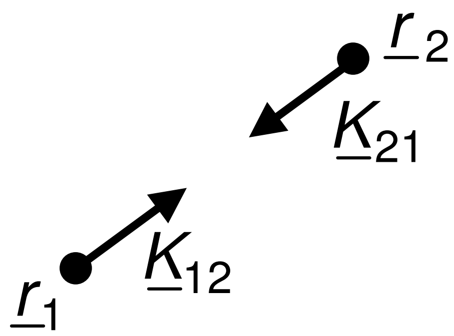
$$\underline{K}_{12} = -\underline{K}_{21} \qquad (1.21)$$

- Bsp: Tau ziehen, fallender Stein und Erde
- Grundlage der Statik von Baukonstruktionen
- Annahme: instantane Kraftwirkung, Kraftwirkung breitet sich mit unendlicher Geschwindigkeit aus (Bsp: Gravitationskraft)

Widerspruch zur SRT: Lichtgeschwindigkeit ist die maximale Geschwindigkeit

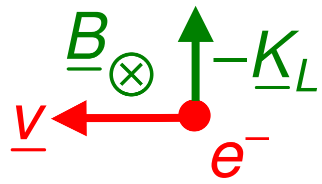
- „Annahme“:

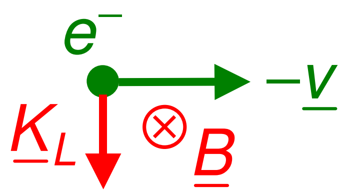
$$\boxed{(\underline{r}_1 - \underline{r}_2) \times \underline{K}_{12} = \underline{0}} \quad (1.22)$$



andernfalls würde sich abgeschlossenes System in Drehung versetzen (Verletzung der Drehimpulserhaltung)

Gegenbeispiel: Lorentzkraft $\underline{K}_L = \frac{q}{c}(\underline{v} \times \underline{B})$





d) Lex quarta (Hilfssatz):

$$\boxed{\text{Kräfte sind Vektoren} \rightarrow \text{Superpositionsprinzip: } \underline{K} = \sum_i \underline{K}_i} \quad (1.23)$$

- weitere Annahme, in Lex secunda vorausgesetzt

e) Grundaufgabe:

- Bestimme Bahnkurven von Massepunkten

1. Aufstellen des Kraftgesetzes ($\rightarrow$ Kapitel 3)
2. Lösung der Dgl. 2.Ordnung in der Zeit:

$$m\,\ddot{\underline{r}}(t) = \underline{K}[\,\underline{r}(t), \dot{\underline{r}}(t), t\,] \qquad (1.24)$$

(keine anderen Kräfte bekannt)

3. Anfangsbedingung $[\text{Bsp: } \underline{r}(0), \dot{\underline{r}}(0)]$

$\rightarrow$ Integrationskonstanten

4. Diskussion

- „numerisches“ Schema für die Integration (Lösen) von

$$m\ddot{\underline{r}}(t) = \underline{K}[\underline{r}(t), \dot{\underline{r}}(t), t] \qquad (1.24)$$

Geg: $\underline{r}(t), \dot{\underline{r}}(t)$ zur Zeit t

$$\Rightarrow \quad \left.\begin{aligned} d\underline{r}(t) &= \dot{\underline{r}}(t)\,dt \\ d\dot{\underline{r}}(t) &= \underline{K}[\underline{r}(t), \dot{\underline{r}}(t), t]\,dt/m \end{aligned}\right\} \left\{\begin{aligned} \underline{r}(t+dt) &= \underline{r}(t) + d\underline{r}(t) \\ \dot{\underline{r}}(t+dt) &= \dot{\underline{r}}(t) + d\dot{\underline{r}}(t) \end{aligned}\right.$$

(1.25)

$\Rightarrow$ (1.24) und $\underline{r}(0)$, $\dot{\underline{r}}(0)$ bestimmen die Dynamik des Massepunktes eindeutig.