Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik

19. November 2007

Prof. Dr. H. Stark
Dipl.-Phys. Frank Milde
Dipl.-Phys. Reinhart Vogel

www.itp.tu-berlin.de/menue/lehre/lv/ws0708/pvbs/mechanik/
Tutoren: Uyen Dang, Christin David und Christopher Wollin

6. Übungsblatt zur Theoretische Physik I: Mechanik

Abgabe: bis Mittwoch 28.11.2006 8:30 Uhr in der VL.

Aufgabe 15 (6 Punkte): *δ-Distribution II*

Die δ-Distribution wurde im fünften Übungsblatt durch ihre Wirkung auf Funktionen f definiert:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0). \tag{1}$$

und man konnte sie als **Grenzwert** einer **Funktionenschar** δ_ϵ angegeben. Um zu überprüfen, dass eine solche Schar eine Darstellung der δ-Distribution ist, reicht es dann zu zeigen, dass im Grenzwert „unter dem Integral" die Bedingung (1) erfüllt ist[1].
Es gibt mehrere Möglichkeiten, diese sogenannte „(Dirac-) δ-Funktion" darzustellen. Eine davon soll in dieser Aufgabe näher betrachtet werden.

(a) Zeige, dass durch folgende Funktionenschar (*Lorenz-Kurve*) im Grenzwert $\epsilon \to 0$ eine Darstellung für die „δ-Funktion" gegeben ist:

$$g_\epsilon(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2}$$

Tipp: Benutze die Substitution $y = \frac{x}{\epsilon}$. Grenzwertbildung und Integration dürfen, wo dies sinnvoll ist, vertauscht werden.

(b) Zeige, dass für Funktionen f, die differenzierbar und außerhalb eines beschränkten Intervalles Null sind,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) dx = \int_{0}^{\infty} -f'(x) dx \tag{2}$$

gilt,

(i) durch direktes Überprüfen der definierenden Gleichung (1)

(ii) durch partielle Integration mit Hilfe der Darstellung durch die Schar g_ϵ.

Tipp: Benutze als Stammfunktion von $\epsilon/(x^2 + \epsilon^2)$ dafür $\arctan(x/\epsilon) + \pi/2$ und zeige, dass die Schar der Stammfunktionen von g_ϵ fast überall[2] gegen die sogenannte „Heavyside"-Funktion

$$H(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

konvergiert (aus diesem Grunde wird diese Funktion dann auch als Stammfunktion der δ-Distribution bezeichnet).

[1] Eine **nützliche Tatsache**, die aus der Theorie der Distributionen stammt, ist, dass man dies nur für alle sogenannten Test-Funktionen zu zeigen braucht, die beliebig oft differenzierbar sind und außerdem außerhalb eines beschränkten Intervalles Null sind. Insbesondere fallen solche Funktionen schnell genug gegen $\pm\infty$ ab, so dass alle vorkommenden Integrale existieren.

[2] „Fast überall" bedeutet, dass die Schar nur in einzelnen, isolierten Punkten - hier nämlich in der Null - nicht entsprechend konvergiert. Für den Wert eines Integrals sind aber einzelne Punkte auf der x-Achse irrelevant. Achtung: Diese Aussage gilt bei „echten" Funktionen (wie sie hier vorliegen: $H(x)$ und $f'(x)$) und wenn die Schar auch gegen eine Funktion konvergiert (die sich an einigen Punkten unterscheiden darf)!

(c) Zeigen Sie, dass folgende Relationen gelten:

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x) \tag{3}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_0}\delta(x_0 - x)\right) f(x)\mathrm{d}x = f'(x_0). \tag{4}$$

Aufgabe 16 (3 Punkte): *Gaußverteilung*
Das n-te Moment der Gaussverteilung ($n \in \mathbb{N}$) ist gegeben durch:

$$M_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} x^n \exp(-\frac{x^2}{2\sigma^2})\mathrm{d}x.$$

(a) Bestimmen Sie explitzit die ersten drei Momente der Gaußverteilung.

(b) Leiten Sie eine Rekursionsformel ab.

Tipp für (b): Beweis mittels vollständiger Induktion ist nicht nötig.

Aufgabe 17 (6 Punkte): *Kette*
Die Newtonsche Mechanik ist nicht auf Massenpunkte beschränkt, sondern läßt sich auch auf ausgedehnte Körper erweitern: Eine Kette mit der Masse m und der Länge L hänge über eine Tischkante, so daß ein Teil auf dem Tisch liegt, ein anderer Teil (der Länge $l(t)$) vom Tisch herunterhängt.

(a) Stellen Sie die Bewegungsgleichung auf und geben Sie die allgemeine Lösung $l_{\mathrm{allg}}(t)$ an.

(b) Fassen Sie die Lösung für die Anfangsbedingung $l(t = 0) = l_0 > 0$, $\dot{l}(t = 0) = 0$ zu einer hyperbolischen Funktion zusammen und stellen Sie diese für $l_0 = L/2$ graphisch ($l(t)$-Diagramm) dar. Wann ist die Kette komplett vom Tisch gerutscht? Was bedeutet das für die Lösung?

(c) Am herunterhängenden Kettenende sei ein Körper mit der konstanten Masse M befestigt. Desweiteren soll eine Reibungskraft wirken, die sich aus der betroffenen Masse der Kette und μg zusammensetzt (μ – Haftreibungszahl, g – Erdbeschleunigung). Erweitern Sie die Bewegungsgleichung und konstruieren Sie die allgemeine Lösung unter Verwendung einer zu ratenden speziellen Lösung und der homogenen Lösung aus 2a. Bestimmen Sie die Konstanten für die Anfangsbedingungen aus 2b. Welches Stück l_0 der Kette muss anfangs üeberhängen, damit die Kette von selbst ins Rutschen kommt?

Aufgabe 18 (5 Punkte): *Harmonischer Oszillator*
Betrachten Sie den eindimensionalen harmonischen Oszillator mit äußerer Kraft $F(t)$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = F(t).$$

(a) Berechnen Sie die kausale Greensche Funktion.

(b) Lösen Sie mit Hilfe der Greenschen Funktion die DGL für

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \text{ und } t > \tau \\ k/\tau & \text{für } 0 < t < \tau \end{cases} \quad \text{mit } \tau \ll 2\pi/\omega \text{ und } k = const.$$

(c) Vergleichen Sie Ihre Lösung für $\tau \longrightarrow 0$ mit der allgemeinen Lösung des harmonischen Oszillators ohne äußere Kräfte.