Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik
7. Dezember 2007
Prof. Dr. H. Stark
Dipl.-Phys. Frank Milde
Dipl.-Phys. Reinhart Vogel
www.itp.tu-berlin.de/menue/lehre/lv/ws0708/pvbs/mechanik/
Tutoren: Uyen Dang, Christin David und Christopher Wollin

9. Übungsblatt zur Theoretische Physik I: Mechanik

Abgabe: bis Mittwoch 18.12.2006 8:30 Uhr in der VL.

Aufgabe 25 (8 Punkte): *Virialsatz*
Betrachten Sie ein System aus N Teilchen.

(a) Zeigen Sie, dass für beschränkte Orte und Impulse für den Mittelwert[1] $\overline{T}$ der kinetischen Energie $T(t) = \sum_{\nu=1}^{N} \frac{m_i}{2} \dot{\underline{r}}_\nu \cdot \dot{\underline{r}}_\nu$

$$2\overline{T} = -\overline{\sum_{\nu=1}^{N} \underline{r}_\nu \cdot \underline{F}(\underline{r}_\nu)}$$

gilt (Virialsatz). Hierbei ist $\underline{F}(\underline{r}_\nu)$ die Kraft, welche auf das ν'te Teilchen wirkt.
Tipp: Betrachten Sie den Mittelwert von $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_\nu \underline{p}_\nu \cdot \underline{r}_\nu$.

(b) Eine Funktion $V(\underline{r}_1, \ldots, \underline{r}_N)$ heißt homogen vom Grade k, wenn gilt $V(\alpha\underline{r}_1, \ldots, \alpha\underline{r}_N) = \alpha^k V(\underline{r}_1, \ldots, \underline{r}_N) \quad (\alpha \geq 0)$. Zeigen Sie durch Differentiation dieser Gleichung nach α die Relation

$$\sum_{i=\nu}^{N} \underline{r}_\nu \cdot \frac{\partial}{\partial \underline{r}_\nu} V(\underline{r}_1, \ldots, \underline{r}_N) = kV(\underline{r}_1, \ldots, \underline{r}_N).$$

(c) Zeigen Sie, dass sich der Virialsatz zu

$$2\overline{T} = k\overline{V}$$

vereinfacht, wenn die Kräfte durch ein homogenes Potential vom Grad k erzeugt werden.

(d) Welche Form hat der Virialsatz für die Potentiale

$$V(\underline{r}_1, \ldots, \underline{r}_N) = \sum_{\nu,\mu=1}^{N} \frac{\alpha_{\nu\mu}}{2} (\underline{r}_\nu - \underline{r}_\mu)^2$$
$$V(\underline{r}_1, \ldots, \underline{r}_N) = \sum_{\nu,\mu=1}^{N} \frac{-\alpha_{\nu\mu}}{|\underline{r}_\nu - \underline{r}_\mu|}$$

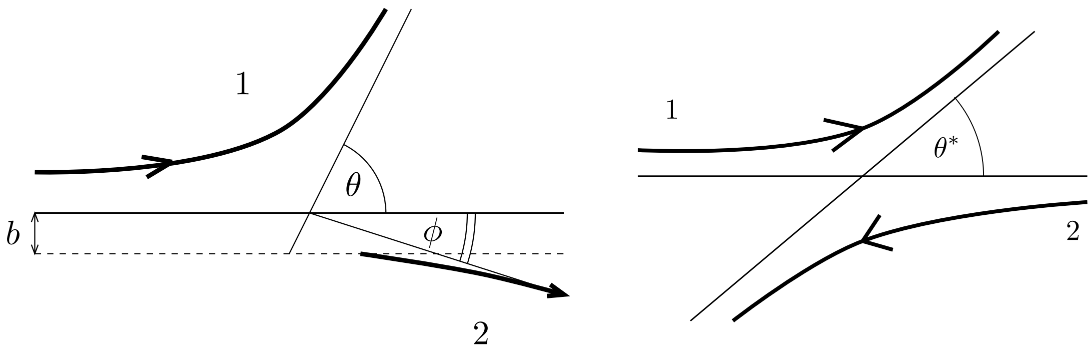
Aufgabe 26 (6 Punkte): *Elastischer Zweiteilchenstoß*

Betrachten Sie zwei Teilchen der Masse m_1 und m_2, deren Wechselwirkung z. B. durch das kugelsymmetrische Potential $U(r)$ (abstoßend oder anziehend) gegeben sei. Das Potential gehe im Unendlichen mindestens wie $1/r$ gegen Null. Der Versuch wird in der Regel im Labor so ausgeführt, dass das Teilchen 2 vor dem Stoß ruht (das sog. *Target*), während Teilchen 1 (das *Projektil*) aus dem Unendlichen kommend am Targetteilchen vorbeiläuft und, ebenso wie dieses, im Unendlichen entweicht.
Diese Bewegung sieht in beiden Teilchen (Laborsystem LS) unsymmetrisch aus, da sich neben der Relativbewegung auch der Schwerpunkt weiterhin nach rechts bewegt. Legt man nun ein zweites Bezugssystem in den Schwerpunkt (Schwerpunktsystem SS) so erhält man ein symmetrisches

[1] Der zeitliche Mittelwert einer beschränkten Funktion $f(t)$ ist gegeben durch $\overline{f} := \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{\tau} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Bild. In beiden Systemen können die Teilchen lange vor dem und lange nach dem Stoß durch ihre Impulse charakterisiert werden:

im LS: $\underline{p}_i$ vor, $\underline{p}'_i$ nach dem Stoß, $i = 1, 2$;
im SS: $\underline{p}^*$ und $-\underline{p}^*$ vor, $\underline{p}'^*$ und $-\underline{p}'^*$ nach dem Stoß.



1. Formulieren Sie jeweils für das Labor- und Schwerpunktsystem mit Hilfe von Energie- und Impulserhaltung welche Zusammenhänge vor bzw. nach dem Stoß zwischen dem Gesamtimpuls $\underline{P}$, den LS-Impulsen $\underline{p}_1$, $\underline{p}_2$ und dem Relativimpuls $\underline{p}^*$ gelten.

2. Leiten Sie aus der Betrachtung des Skalarproduktes $\underline{p}_1 \cdot \underline{p}'_1$ den in der VL gezeigten Zusammenhang zwischen dem Streuwinkel im SS θ und LS θ^* ab:

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta^*}{m_1/m_2 + \cos\theta^*}.$$

3. Was gilt für den Zusammenhang in den Grenzfälle von **(a)** $m_1 \ll m_2$ und **(b)** $m_1 = m_2$. Interpretieren Sie Ihr Ergebnis.

Aufgabe 27 (6 Punkte): *Trägheitstensor*

Stellen Sie sich einen starren Körper vor, bestehend aus vier miteinander verbundenen Kugeln. Die Massen der Kugeln sollen viel grösser sein, als die der Verbundungsstücke, so dass die Masse der Verbindungen vernachlässigt und die Kugelmasse sich in einem Punkt konzentriert gedacht wird. Die Massenpunkte werden als Abstand vom Koordinatenursprung mit Hilfe der folgenden Vektoren beschrieben:

$$\mathbf{r}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha\mathbf{e}_1 - \alpha\mathbf{e}_2), \ \ \mathbf{r}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\alpha\mathbf{e}_1 + \alpha\mathbf{e}_2), \tag{1}$$

$$\mathbf{r}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}((1-\alpha)\mathbf{e}_1 + (1-\alpha)\mathbf{e}_2), \ \ \mathbf{r}_4 = -\frac{1}{\sqrt{2}}((1-\alpha)\mathbf{e}_1 + (1-\alpha)\mathbf{e}_2) \tag{2}$$

Wobei $\mathbf{e}_i$ die Vektoren der Standardbasis bezeichnen.

(a) Bestimmen Sie alle Komponenten des Trägheitstensors, wenn alle Massenpunkte die Masse m haben.

(b) Bestimmen Sie die Eigenvektoren mit den zugehörigen Eigenwerte.