Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik
17. Dezember 2007
Prof. Dr. H. Stark
Dipl.-Phys. Frank Milde
Dipl.-Phys. Reinhart Vogel
www.itp.tu-berlin.de/menue/lehre/lv/ws0708/pvbs/mechanik/
Tutoren: Uyen Dang, Christin David und Christopher Wollin

10. Übungsblatt zur Theoretische Physik I: Mechanik

Abgabe: bis Mittwoch 16.01.2009 8:30 Uhr in der VL.

Aufgabe 28 (3 Punkte): *Trägheitsellipsoid*
Betrachtet man die kinetische Rotationsenergie eines starren Körpers $T = 1/2\ \underline{\omega} \cdot \underline{\underline{\Theta}}\ \underline{\omega}$ und substituiert $\underline{\rho} = \underline{\omega}/\sqrt{2T}$, dann erhält man

$$1 = \sum_{ij} \rho_i \Theta_{ij} \rho_j = \rho_i \Theta_{ij} \rho_j$$

1. Zeigen Sie, dass dies die Gleichung für die Oberfläche eines Ellipsoiden ist.
2. Zeigen Sie, dass der Drehimpuls $\underline{L}$ zu einer gegeben Richtung der Rotation $\underline{\rho}$ immer senkrecht auf der Oberfäche des Trägheitsellipsoiden steht.

Aufgabe 29 (6 Punkte): *Stabile Lagen der Rotation*
Gegeben sei ein starrer Körper ohne Einfluss äußerer Kräfte mit Hauptträgheitsmomenten $\Theta_1 \neq \Theta_2 \neq \Theta_3$. Zeigen Sie zunächst, dass eine Rotation um eine Hauptträgheitsachse Lösung der Eulergleichungen ist. Testen Sie, unter welchen Bedingungen diese Lösungen unter Einfluss einer kleinen Störung stabil sind.
Tipp: Zum Testen der Stabilität betrachten Sie eine Bewegung die geringfügig von der ungestörten Lösung abweicht (z.B $\omega_1 \approx \omega_1^0,\ \omega_2 \ll \omega_1^0,\ \omega_3 \ll \omega_1^0$) und vernachlässigen Sie Terme die in den kleinen Größen ($\omega_2,\ \omega_3$) quadratisch sind. Bleiben die Störungen klein unter der zeitlichen Entwicklungen, dann nennt man die ungestörte Lösung stabil.

Aufgabe 30 (3 Punkte): *Physikalisches Pendel*
Gegeben sei ein starrer Körper der sich im homogenen Schwerefeld befindet und um eine Achse ω drehbar gelagert ist. Bestimmen Sie die Bewegungsgleichung dieses Pendels und vergleichen Sie mit dem Ergebnis für das Fadenpendel. Wie lautet der Energiesatz dieses Pendels?

Aufgabe 31 (5 Punkte): *Trägheitstensor*
Bestimmen Sie den Trägheitstensor

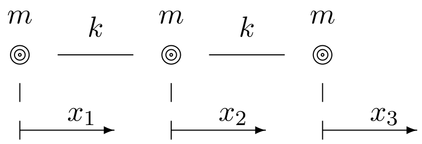
1. Eines Ziegels mit Kantenlängen a, b, c. Wie sieht der Trägheitstensor im Grenzfall eines Würfels aus?
2. Eines Ellipsoids mit Halbachsen a, b, c. Wie sieht der Trägheitstensor im Grenzfall einer Kugel aus?
   Hinweis: Für Ellipsoidkoordinaten gilt: $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = abc\,r^2 \sin(\vartheta)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi$
   Bonus (+1 Punkt): Zeigen Sie diese Beziehung, in dem Sie die Funktionaldeterminante berechnen.
3. Eines Methan (CH_4) Moleküls. Rechnen Sie in atomaren Masseneinheiten ($m_H = 1$ u und $m_C = 12$ u). Die Bindungslänge betrage l_0.
   Hinweis: Für den Bindungswinkel ϑ gilt: $\sin\vartheta = 2/3\,\sqrt{2}$. Dies entspricht einem Winkel von $\vartheta \approx 109,5°$
   Bonus (+2 Punkte): Zeigen Sie diese Beziehung.

10. Übung TPI WS2007/08

Aufgabe 32 (4 Punkte): *Satz von Steiner*

1. Beweisen Sie den Satz von Steiner.
2. Bestimmen Sie den Trägheitstensor eines Körpers der aus zwei identischen, homogenen Kugeln mit Radius R besteht, die an ihrem Berührungspunkt T zusammengeschweißt sind.

Aufgabe 33 (4 Punkte): *Schwingungsfrequenzen eines Moleküls*
Ein einfaches Modell für ein dreiatomiges Molekül ist eine lineare Anordnung dreier Massepunkte, die durch masselose Federn miteinander verbunden sind. Berechnen Sie die Eigenschwingungen des Systems für den Fall gleicher Massen m und gleicher Federkonstanten k.



Hinweis: Zeigen Sie, daß Sie mit dem Ansatz $x_j = A_j \sin(\omega t)$ aus den Bewegungsgleichungen ein Eigenwertproblem erhalten und berechnen Sie dessen Eigenwerte (Eigenfrequenzen) und Eigenvektoren. Diskutieren Sie für die 3 Eigenschwingungen eine physikalische Interpretation.

Bonusaufgabe 34 (5 Zusatzpunkte): *Weihnachtsmann*
Ein Weihnachtsmann mit Masse m und Trägheitsmoment Θ_0 bezüglich der Rotation um den Schwerpunkt (um die y-Achse) sitzt mit seinem Schwerpunkt in der Höhe h über den Kufen eines masselosen Schlittens, der auf einer ortsfesten Eiskugel mit Radius R steht. Bestimmen Sie für den Fall, daß bei $\theta \approx 0$ gestartet wird, die Bahnkurve $z(x)$ sowie die Eigenrotation $\varphi(x)$. Die Reibung des Schlittens soll vernachläßigt werden.

(a) Bei welchem Winkel θ hebt der Schlitten ab?

(b) Mit welchem Winkel φ erreicht der Weinachtsmann die Auflagefläche der Eiskugel?