Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik

18. Januar 2008

Prof. Dr. H. Stark
Dipl.-Phys. Frank Milde
Dipl.-Phys. Reinhart Vogel

www.itp.tu-berlin.de/menue/lehre/lv/ws0708/pvbs/mechanik/
Tutoren: Uyen Dang, Christin David und Christopher Wollin

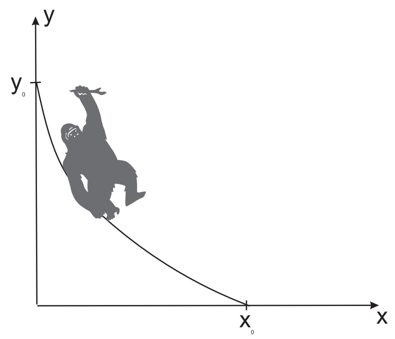
12. Übungsblatt zur Theoretische Physik I: Mechanik

Abgabe: bis Mittwoch 30.01.2006 8:30 Uhr in der VL.

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Bitte den Namen des Tutors auf die Aufgabenzettel raufschreiben.

Aufgabe 38 (8 Punkte): *Brachystochronenproblem*

An Bord eines Flugzeuges ist nach der Landung ein Feuer ausgebrochen. Die Passagiere müssen über eine Notrutsche aussteigen, auf der sie reibungsfrei herabgleiten. Hierbei müssen sie den Höhenunterschied y_0 bewältigen und einen Sicherheitsabstand zum Flugzeug x_0 erreichen. Bestimmen Sie die optimale Form (Bahn) der Rutsche, damit die Passagiere das Flugzeug auf dem schnellsten Wege verlassen können.



- Zeigen Sie, dass das Funktional $T[y]$ durch

$$T[y] = \int_0^{t_f} dt = \int_0^{x_0} \sqrt{\frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{2g\{y_0 - y(x)\}}}\,dx$$

  gegeben ist. Folgern Sie dies aus der Energieerhaltung.

- Zeigen Sie, dass die Extremalbedingung $\frac{\delta T[y]}{\delta y(x)} = 0$ für die Funktionalableitung zu folgender Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{2g(y_0 - y(x))(1+(y'(x))^2)}\right] = 0$$

  äquivalent ist.

- Integrieren Sie die Differentialgleichung einmal und zeigen Sie, dass die Lösung durch

$$x = x(s) = \frac{c^2}{4g}(s - \sin(s)) \qquad \text{und} \qquad y = y(s) = y_0 - \frac{c^2}{4g}(1-\cos(s))$$

  gegeben ist.

- Stellen Sie die Lösung für $y_0 = 1$ und verschiedene c graphisch dar und diskutieren Sie das Ergebnis.

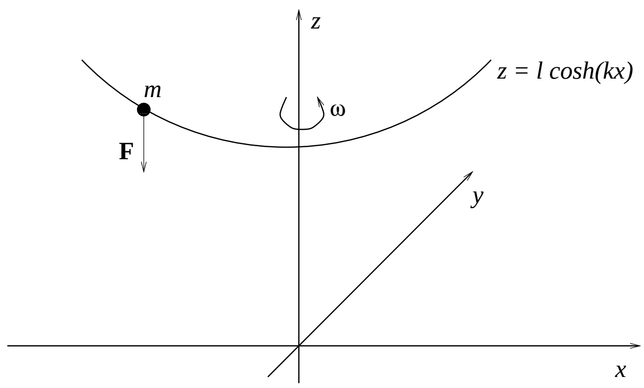
12. Übung TPI WS2007/08

Aufgabe 39 (6 Punkte): *Perle auf rotierendem Draht*

Betrachte einen Draht, dessen Form zur Zeit $t = 0$ durch die Kurve $z = l\cosh(kx)$ (mit Konstanten $l > 0$ und k) gegeben ist. Auf dem Draht ist reibungsfrei eine Perle der Masse m eingefädelt, die dem Schwerefeld $\underline{F} = -mg\underline{e}_z$ der Erde ausgesetzt ist. Nun wird der Draht mit der Winkelgeschwindigkeit ω um die z-Achse rotiert.

(a) Stelle die Lagrange-Gleichungen 2. Art in geeigneten Koordinaten auf.

(b) Wie groß muß ω mindestens sein, damit die Perle eine stabile Kreisbahn erreichen kann?

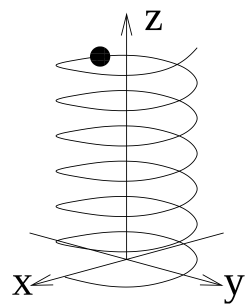


Aufgabe 40 (6 Punkte): *Perle auf der Schraubenlinie*

Eine Perle der Masse m gleitet unter Einwirkung der Gravitationskraft $\underline{F} = -mg\underline{e}_z$ reibungsfrei auf einer Schraubenlinie (siehe Abb.)

$$\underline{r}(t) = \begin{pmatrix} R\cos\varphi(t) \\ R\sin\varphi(t) \\ b\varphi(t) \end{pmatrix}$$

mit $b > 0$, konstantem Radius $R > 0$ und Polarwinkel $\varphi(t)$.



1 Formulieren Sie die Lagrange-Funktion des gegebenen Problems unter Verwendung der Zwangsbedingungen.

2 Leiten Sie eine Differentialgleichung für $\ddot{\varphi}(t)$ im Lagrange-II-Formalismus her.

3 Formulieren Sie die Lösung der Differentialgleichung für $\ddot{\varphi}(t)$.

5 Stellen Sie die Lösung graphisch dar.