Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik

9. November 2007

Prof. Dr. H. Stark
Dipl.-Phys. Frank Milde
Dipl.-Phys. Reinhart Vogel

www.itp.tu-berlin.de/menue/lehre/lv/ws0708/pvbs/mechanik/
Tutoren: Uyen Dang, Christin David und Christopher Wollin

5. Übungsblatt zur Theoretische Physik I: Mechanik

Abgabe: bis Mittwoch 21.11.2006 8:30 Uhr in der VL.

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Bitte den Namen des Tutors auf die Aufgabenzettel raufschreiben.

Aufgabe 12 (4 Punkte): *Potentiale*
Gegeben sind folgende Potentiale

$$U(x) = \begin{cases} \infty & x < 0 \\ mgx & x > 0 \end{cases} \qquad \text{(freier Fall)} \tag{1}$$

$$U(x) = (x - x_0)^2 (x + x_0)^2 \qquad \text{(anharmonischer Oszillator)} \tag{2}$$

$$U(x) = -\omega \cos(x) \qquad \text{(Pendel)} \tag{3}$$

$$U(x) = 4\epsilon \left(\left(\frac{x_0}{x}\right)^{12} - \left(\frac{x_0}{x}\right)^{6} \right) \quad (x > 0) \qquad \text{(Lennard-Jones-Potential)} \tag{4}$$

Geben Sie die stabilen und instabilen Ruhelagen an. In welchen Punkten wird der Betrag der Geschwindigkeit maximal/minimal? Für welche Energien kommt es zu Schwingungen? Zeichnen Sie qualitativ die Phasenporträts.

Aufgabe 13 (10 Punkte): *Fouriertransformation*

Ein Vektor $\underline{a}$ lässt sich nach einer Orthonormalbasis $\{\underline{e}_i\}$ entwickeln, so dass gilt: $\underline{a} = \sum_i a_i \underline{e}_i$. Dabei sind die Entwicklungskoeffizienten bezüglich der gewählten Basis $\{\underline{e}_i\}$ durch $a_i = \underline{e}_i \cdot \underline{a}$ gegeben. Genauso lassen sich auch Funktionen $f(t)$ nach geeigneten Basisfunktionen entwickeln (bei der Taylor-Reihe sind das z.B. Polynome in x, welche eine Basis im Funktionenraum darstellen). Bei der Fourier-Transformation (FT) sind die Basisfunktionen durch trigonometrische Funktionen $\exp(i\omega t) = \cos(\omega t) + i \sin(\omega t)$ gegeben. Die FT bildet eine große Klasse von Funktionen $f(t)$ auf andere Funktionen $\hat{f}(\omega)$ ab. Sie bewirkt dabei einen Darstellungswechsel zwischen den Variablen t und ω. Anschaulich kann man die FT als eine Zerlegung der Funktion $f(t)$ in (ebene) Wellen ansehen, die Funktion $\hat{f}(\omega)$ gibt dabei die Amplitude der zur Frequenz ω gehörenden Welle an. Da ebene Wellen in vielen physikalischen Theorien einfache Lösungen der zugrundeliegenden Differentialgleichungen sind, findet die FT zahlreiche Anwendungen.
Die Definition der Fourier-Transformation ist gegeben durch:

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} \mathrm{d}t.$$

Man kann dann zeigen, dass sich $f(t)$ über

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}. \tag{5}$$

darstellen lässt. Beachten Sie, dass im Vergleich zu Vektoren die (endliche) Summe $\sum_i$ durch das (unendliche) Integral $\int_{-\infty}^{\infty}$ ersetzt wurde. Das verallgemeinerte Skalarprodukt zweier komplexer Funktionen $f(t)$, $g(t)$ ist durch $\int_{-\infty}^{\infty} f^*(t) g(t) \mathrm{d}t$ gegeben, wobei $*$ fuer das komplex konjugierte von $f(t)$ steht.

1. Zeigen Sie, dass für reelle $f(t)$ gelten muss: $\hat{f}(-\omega) = \hat{f}^*(\omega)$.

2. Beweisen Sie, das Ableitungen bei FT in Multiplikation mit ω übergehen:

$$\widehat{\left(\frac{d}{dt}f(t)\right)} = i\omega\hat{f}(\omega)$$

Tipp: Nehmen Sie dazu an, dass $f(t) \to 0$ für $|t| \to \infty$.

3. Berechnen Sie die FT $\hat{\delta}_\varepsilon(\omega)$ für die Rechteckfunktion

$$\delta_\varepsilon(t) := \begin{cases} 1/\varepsilon & \text{für } |t| \leq \varepsilon/2, \\ 0 & \text{für } |t| > \varepsilon/2 \end{cases}$$

und berechnen Sie dann daraus mit Hilfe von Gl. (5) $\delta_\varepsilon(t)$. Diskutieren Sie Ihr Resultat für variierendes ε. Betrachten Sie insbesondere die Grenzfälle $\varepsilon \to 0$ und $\varepsilon \to \infty$.

4. Die δ-Distribution ist durch ihre Wirkung auf Funktionen f definiert:$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x_0)f(x)\mathrm{d}x = f(x_0)$. Etwas vereinfacht wird die δ-Distribution selbst oft als Funktion bezeichnet, was aber im strengen Sinne nicht möglich ist (eine solche Funktion müsste überall außer in der 0 verschwinden und in der 0 „irgendwie" unendlich sein...). Berechnen Sie die FT $\hat{\delta}(\omega)$. Welche Fourierdarstellung ergibt sich damit für $\delta(t)$?

5. Berechnen Sie die Fourier-Transformierte eines Gaußpaketes der Breite σ:$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right)$. Welche Breite besitzt die Fouriertransformierte? *Tipp: Benutzen Sie hierzu, dass* $\int_{-\infty}^{\infty} dx \exp[-\alpha(x+i\beta)^2] = \sqrt{\pi/\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$,*welches sich mit Hilfe der Funktionentheorie herleiten läßt.*

6. Als *Faltung* $f * g$ zweier Funktionen wird das Integral $(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)\mathrm{d}\tau$ bezeichnet. Zeigen Sie, dass bei einer FT die Faltung in eine Multiplikation übergeht: $\widehat{(f * g)}(\omega) = \hat{f}(\omega) \cdot \hat{g}(\omega)$.

Aufgabe 14 (6 Punkte): *Newton'sche Reibung*
Betrachten Sie eine Kugel mit Radius R, die sich im freien Fall befindet. In Luft ist die Reibungskraft auf die bewegte Kugel proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit

$$\underline{F}_{\text{Newton}} = -1/2\rho c_w A v^2 \frac{\underline{v}}{v}.$$

Dabei ist ρ die Dichte des Mediums, c_w der Strömungswiderstandkoeffizient und A die Querschnittsfläche der Kugel.

1. Stellen Sie die Bewegungsgleichung (Differentialgleichung) für die Geschwindigkeit $\underline{v}$ auf.
2. Bestimmen Sie die stationären Lösungen mit $\underline{v} = const.$
3. Lösen Sie die DGL aus (1) für $\underline{v}(t)$ und $\underline{r}(t)$ für den Fall $\underline{v}(0) = 0$.
4. Geben Sie eine Näherung von $\underline{v}(t)$ und $\underline{r}(t)$ für große t an. Vergleichen Sie das Ergebniss mit der Stationären Lösung.

(*Tipp: Trennung der Veränderlichen ist ein Weg um die DGL zu lösen.*)