

7. Übungsblatt zur Theoretische Physik I: Mechanik

Abgabe: bis Mittwoch 5.12.2006 8:30 Uhr in der VL.

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Bitte den Namen des Tutors auf die Aufgabenzettel raufschreiben.

Aufgabe 19 (6 Punkte): Lenz-Vektor

Gegeben sei ein Massenpunkt der Masse m , der sich in einem Zentralkraftfeld $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla_{\mathbf{r}}V(r)$ bewegt. Der Vektor

$$\mathbf{A} \equiv \mathbf{v} \times \mathbf{L} + V(r)\mathbf{r}$$

werde als verallgemeinerter, zum Potential $V(r)$ gehöriger *Lenz-Vektor* bezeichnet ($\mathbf{v} \dots$ Geschwindigkeit und $\mathbf{L} \dots$ Drehimpuls des Teilchens).

1. Zeigen Sie, daß für das Potential

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r} \quad \text{mit}$$

der Lenz-Vektor eine Erhaltungsgröße ist.

2. Berechnen Sie das Betragsquadrat $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$ für das Potential aus 1. und geben Sie das Ergebnis in Abhängigkeit von α , dem Betrag L des Drehimpulses und der Gesamtenergie E des Teilchens an.
3. Zeigen Sie mit Hilfe des Lenz-Vektors mit dem Potential aus 1., daß sich die Bahngleichung des Teilchens für $\alpha < 0$ in der Form

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + \epsilon \cos \varphi}$$

schreiben läßt, wobei φ der Winkel zwischen \mathbf{A} und \mathbf{r} ist. Geben Sie die Bahnparameter p und ϵ als Funktion von m , α , L und E an (Hinweis: Betrachten Sie hierzu das Skalarprodukt $\mathbf{A} \cdot \mathbf{r}$).

Welche anschauliche Bedeutung hat der Lenz-Vektor \mathbf{A} ?

Aufgabe 20 (7 Punkte): Ein künstlicher Satellit

In einer Höhe $h = 200$ km über dem Äquator wird ein künstlicher Satellit der Masse $m \approx 10^3$ kg in horizontaler Richtung nach Osten mit einer Geschwindigkeit v_0 gestartet. (Erdmasse $M_e \approx 5.97 \cdot 10^{24}$ kg, Erdradius $R_e \approx 6.36 \cdot 10^6$ m)

- (a) Wie groß muss v_0 gewählt werden, damit der Satellit eine Kreisbahn (v_{Kreis}), bzw. eine Parabelbahn (v_{Par}) durchläuft? Welche Bahnen treten für $v_0 \neq v_{\text{Par}}$ auf?

7. Übung TPI WS2007/08

- (b) Welche Folge hätte ein Fehler von $\pm 2\%$ im Höhenwinkel beim Abschuss mit der Kreisbahngeschwindigkeit? Bestimme den erdnächsten Punkt der „falschen“ Flugbahn.
- (c) Der Satellit bewege sich nun auf einer Kreisbahn. Geben Sie seine kinetische und potenzielle Energie als Funktion des Drehimpulses an. In welchem Verhältnis stehen die beiden Energien zueinander?
- (d) Stellen Sie sich nun vor: Sie befinden sich mit Ihrem nicht mehr beschleunigten Raumschiff auf der kreisförmigen Umlaufbahn des Satelliten und sehen ihn „vor“ sich. Wie können Sie ihn einholen? *Tipp: Nutzen Sie bei der Überlegung das Ergebnis von (c).*

Aufgabe 21 (7 Punkte): Sphärisches Fadenpendel

Wir betrachten eine Kugel der Masse m , die an einem Faden der Länge l hängt. Der Aufhängepunkt sei bei $\underline{r} = 0$ und die z-Achse zeige nach unten.

1. Berechne den Anteil der auf die Kugel wirkenden Kraft, der zu einer Beschleunigung der am Faden hängenden Kugel führen kann. (Benutze zunächst kartesische Koordinateneinheitsvektoren und rechne danach in Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ) um.)
2. Gib die Bewegungsgleichung in Kugelkoordinaten an.
3. Zeige, dass man für $\varphi(t) = \varphi_0 = \text{const.}$ die ebene Pendelgleichung erhält.
4. Bestimme die spezielle Lösung für $\vartheta(t) = \vartheta_0 = \text{const.}$. Welche Bahnkurve erhält man? Wie groß ist die Kraft, die der Faden auf die Kugel ausübt?