Zusammenfassung der 4. Vorlesung (12.11.07)

1.2 *Klassische Wahrscheinlichkeit, Quantentheorie, Blochsphäre und Blochkugel* (Fortsetzung): Ergänzend zur letzten Vorlesung wurde

$$\mathbf{e}(\Theta,\Phi)\cdot\sigma\psi(\Theta,\Phi)=\psi(\Theta,\Phi)$$

explizit ausgeschrieben

$$(|0>|1>)\begin{pmatrix}\cos\Theta & e^{-i\Phi}\sin\Theta\\ e^{i\Phi}\sin\Theta & -\cos\Theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos(\frac{\Theta}{2})\\ e^{i\Phi}\sin(\frac{\Theta}{2})\end{pmatrix}=(|0>|1>)\begin{pmatrix}\cos(\frac{\Theta}{2})\\ e^{i\Phi}\sin(\frac{\Theta}{2})\end{pmatrix}$$

und nachgerechnet. Ebenso wurde

$$\mathbf{e}(\Theta,\Phi)\cdot\sigma\psi(\pi-\Theta,\pi+\Phi)=-\psi(\pi-\Theta,\pi+\Phi),$$

explizit ausgeschrieben

$$(|0>|1>)\begin{pmatrix}\cos\Theta & e^{-i\Phi}\sin\Theta\\ e^{i\Phi}\sin\Theta & -\cos\Theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sin(\frac{\Theta}{2})\\ -e^{i\Phi}\cos(\frac{\Theta}{2})\end{pmatrix}=-(|0>|1>)\begin{pmatrix}\sin(\frac{\Theta}{2})\\ -e^{i\Phi}\cos(\frac{\Theta}{2})\end{pmatrix}$$

und nachgerechnet.
Als Projektoren geschrieben sind die reinen Qubitzustände

$$\begin{aligned}
&|\psi(\Theta,\Phi)><\psi(\Theta,\Phi)|=\\
&\quad(|\cos(\frac{\Theta}{2})|0>+\quad e^{i\Phi}\sin(\frac{\Theta}{2})|1>)(|\cos(\frac{\Theta}{2})<0|\quad+\quad e^{-i\Phi}\sin(\frac{\Theta}{2})<1|)\\
&=\quad\cos^2(\frac{\Theta}{2})0><0|\quad+\quad e^{i\Phi}\cos(\frac{\Theta}{2})\sin(\frac{\Theta}{2})|0><1|\\
&\quad+\quad e^{-i\Phi}\cos(\frac{\Theta}{2})\sin(\frac{\Theta}{2})|1><0|+\sin^2(\frac{\Theta}{2})1><1|,
\end{aligned}$$

oder nach Umformung der Winkelfunktionen als Matrix geschrieben

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix}\frac{1}{2}(1+\cos\Theta) & \frac{1}{2}e^{-i\Phi}\sin\Theta\\ \frac{1}{2}e^{i\Phi}\sin\Theta & \frac{1}{2}(1-\cos\Theta)\end{pmatrix} &= \frac{1}{2}(\mathbf{1}+\cos\Theta\cos\Phi\sigma_x+\cos\Theta\sin\Phi\sigma_y+\cos\Theta\sigma_z)\\
&= \frac{1}{2}(\mathbf{1}+\mathbf{e}(\Theta,\Phi)\cdot\sigma).
\end{aligned}$$

Betrachte nun die Abbildung

$$\mathbf{R}^3 \ni r \longmapsto \frac{1}{2}(\mathbf{1} + r \cdot \sigma).$$

Sei nun $\mathbf{e}(\Theta, \Phi) \cdot \sigma|\varphi_1 >= -|\varphi_1 >$, dann gilt mit $r = \|r\|\mathbf{e}(\Theta, \Phi$

$$< \varphi_1, \frac{1}{2}(\mathbf{1} + r \cdot \sigma)\varphi_1 >= \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \|r\|) \leq < \psi, \frac{1}{2}(\mathbf{1} + r \cdot \sigma)\psi >$$

für alle $\psi \in \mathbf{C}^2$. Damit ist $\frac{1}{2}(\mathbf{1} + r \cdot \sigma)$ genau dann positiv, wenn $\|r\| \leq 1$ ist. Überdies ist $\mathrm{tr}\frac{1}{2}(\mathbf{1} + r \cdot \sigma) = 1$, weil die Pauli Matrizen spurfrei sind. Jeder Qubit Zustand $\rho \in \mathcal{D}(\mathbf{C}^2)$ kann also in der Form $\frac{1}{2}(\mathbf{1} + r \cdot \sigma)$ mit $\|r\| \leq 1$ geschrieben werden und für die statistische Mischung zweier Zustände gilt mit $\lambda \in [0, 1]$

$$\lambda\frac{1}{2}(\mathbf{1} + r \cdot \sigma) + (1 - \lambda)\frac{1}{2}(\mathbf{1} + r' \cdot \sigma) = \frac{1}{2}(\mathbf{1} + (\lambda r + (1 - \lambda)r') \cdot \sigma).$$

Damit ist die Abbildung der Qubit Zustände auf die Einheitskugel des $\mathbf{R}^3$ auch affin. Mit dieser Korrespondenz heißt die Einheitskugel des $\mathbf{R}^3$ *Blochkugel* und der darstellende Vektor r der *Blochvektor* des betreffenden Zustands.
Die diametral gelegenen Randpunkte der Blochskugel $\frac{1}{2}(\mathbf{1} + \mathbf{e}(\Theta, \Phi) \cdot \sigma)$ und $\frac{1}{2}(\mathbf{1} - \mathbf{e}(\Theta, \Phi) \cdot \sigma)$ stellen eine Zerlegung des Einsoperators in orthogonale Projektoren dar. Jede Qubit Observable lässt sich also in der Form

$$A = a_0\frac{1}{2}(\mathbf{1} + \mathbf{e} \cdot \sigma) + a_1\frac{1}{2}(\mathbf{1} - \mathbf{e}(\cdot\sigma)|$$

mit $\|\mathbf{e}01$ schreiben. Für $\rho = \frac{1}{2}(\mathbf{1} + r \cdot \sigma)$ gilt

$$p(a_o) = \mathrm{tr}(\frac{1}{2}(\mathbf{1} + \mathbf{e} \cdot \sigma)\frac{1}{2}(\mathbf{1}\frac{1}{2}(\mathbf{1} + r \cdot \sigma) = \frac{1}{4}\mathrm{tr}(\mathbf{1} + r \cdot \sigma + \mathbf{e} \cdot \sigma + r \cdot \sigma\mathbf{e} \cdot \sigma).$$

Durch vorwärtsrechnen zeigt man leicht

$$r \cdot \sigma\mathbf{e} \cdot \sigma = \sum_{i,j=1}^{3} r_i e_j \sigma_i \sigma_j = r \cdot e\mathbf{1} + i(r \times \mathbf{e}) \cdot \sigma.$$

Da die Spur der Pauli Matrizen verschwindet, ergibt sich

$$p(a_0) = \frac{1}{2}(1 + r \cdot e), \quad \text{und damit auch} \quad p(a_1) = \frac{1}{2}(1 - r \cdot e) = 1 - p(a_0).$$

Der geometrische Ort der Punkte der Blochkugel, denen die Dichteoperatoren mit $p(a_0) = p_0$ entsprechen, ist durch $r \cdot e = 2p_o - 1$ beatimmt. Es ist die Hyperebne mit der Normalen $\mathbf{e}$ und dem Abstand $2p_o - 1$ vom Nullpunkt. Letzterer ist positiv, wenn $p(a_0) \geq p(a_1)$ ist, andernfalls negativ. Die ausgezeichnete Punktmenge ist, wie es sein muss, konvex.