Technische Universität Berlin
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. K.-E.Hellwig

29.10.07
Abgabe: 01.12.07

2. Übungsblatt zur Quanteninformationstheorie I u.II

Nächste Übung: Fr.,01.12.07, 10:15, Raum PN-733

Aufgabe 4 (2 Punkte): Man betrachte die Abbildung

$$\mathbf{R}^3 \ni \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & x_3 \end{pmatrix} =: x \cdot \sigma$$

und zeige:

$$(x \cdot \sigma)(y \cdot \sigma) = (x \cdot y)\mathbf{1} + i(x \times y) \cdot \sigma.$$

Aufgabe 5 (4 Punkte): Man betrachte eine differenzierbare Einparametergruppe linearer Transformationen

$$\mathbf{R} \ni t \mapsto R(t), \quad R(0) = \mathbf{1}, \quad R(s)R(t) = R(s+t)$$

in einem reellen oder komplexen Vektorraum. Der Einfachheit halber besschränken wir uns hier auf endliche Dimensionen
(5.1) Man zeige: $\dot{R}(t) = R(t)\dot{R}(0)$ und speziell gilt in reellen Verktorräumen für eine Einparametergruppe orthogonalen Transformationen $\dot{R}^T(0) = -\dot{R}(0)$. In einem komplexen Vektorraum gilt für eine Einparametergruppe $U(\cdot)$ unitärer Transformationen $\dot{U}^+(0) = -\dot{U}(0)$ oder äquivalent $(i\dot{U}(0))^+ = i\dot{U}(0)$.
(5.2)Man zeige: Das System gewöhnlicher Differentialgleichungen $\dot{R} = AR$ (bzw. $\dot{U} = BU$) hat mit der Anfangsbedingung $R(0) = \mathbf{1}$ (bzw. $U(0) = \mathbf{1}$) stets eine eindeutig bestimmte Lösung und für diese gilt $R(s+t) = R(s)R(t)$ (bzw. $U(s+t) = U(s)U(t)$). A (bzw. B) heißt deshalb die Erzeugende der Einparametergruppe $R(\cdot)$ (bzw. $U(\cdot)$).
(5.3) Für den $\mathbf{R}^3$ **finde man** die Erzeugenden der Drehungen um die natürlichen Koordinatenachsen in positiver Richtung **und zeige**, dass in koordinatenfreier Schreibweise die Drehungen um die durch einen Einheitsvektor $\mathbf{d}$ bestimmte Achse von $x \mapsto \mathbf{d} \times x$ erzeugt werden.
(5.4) Seien σ_i, $i = 1,2,3$, die Pauli Matrizen. **Man finde** die Lösung von $i\dot{U}(\theta) = (1/2)\sigma_1 U(\theta)$ mit der Anfangsbedingung $U(0) = \mathbf{1}$ durch explizites Ausrechnen der Exponentialreihe und schließe direkt auf die Lösung von $i\dot{U}_{\mathbf{d}}(\theta) = (1/2)(\mathbf{d}\cdot\sigma)U_{\mathbf{d}}(\theta)$, wobei $\mathbf{d}$ ein Einheitsvektor des $\mathbf{R}^3$ ist.

Aufgabe 6 (4 Punkte): **Man zeige** Seien $\mathbf{d}$ und $\mathbf{e}$ beliebige Einheisvektorren in $\mathbf{R}^3$, $R_{\mathbf{d}}(\theta)$ die Einparametergruppe der Drehungen um die durch $\mathbf{d}$ bestimmte Achse im im $\mathbf{R}^3$ und $U_{\mathbf{d}}(\theta)$ wie in Aufgabe (5,4),dann ist

$$\frac{1}{i}[\sigma_i, \sigma_j] = 2\sigma_k, \quad \text{bzw.} \quad [\frac{1}{2i}\sigma_i, \frac{1}{2i}\sigma_j] = \frac{1}{2i}\sigma_k \quad (i,j,k)\text{zyklisch},$$

notwendig und hnreichend für

$$U_{\mathbf{d}}^{+}(\theta)(\mathbf{e}\cdot\sigma)U_{\mathbf{d}}(\theta) = (R_{\mathbf{d}}(-\theta)\mathbf{e})\cdot\sigma.$$

Bemerkung: Die letzte Gleichung bildet die physikalische Grundlage für die Deutung von $\mathbf{e}\cdot\sigma$ als Operator der Spinprojektion auf $\mathbf{e}$: Die Präpariereinrichtung für die Spinwellenfunktion ψ und das Meßgerät zur Messung von $\mathbf{e}\cdot\sigma$ nehmen Punkte im Raum ein. Deutet man $x \mapsto R_{\mathbf{d}}(\theta)x$ als Transformation der Punkte des $\mathbf{R}^3$, die sowohl eine veränderete Positionierung der Präpariereinrichtung der Spinteilchen als auch die des Meßgerätes für die Spinprojektion bestimmt, sowie $U_{\mathbf{d}}(\theta)\psi$ als die Spinwellenfunktion, die die Präparieneinrichtung in der neuen Position erzeugt, dann bleibt die relative Position der Präpariereinrichtung zum Meßgerät unverändert. Aufgrund des Relativitätsprinzips muß gelten

$$< \psi, (\mathbf{e}\cdot\sigma)\psi > \quad = \quad < U_{\mathbf{d}}(-\theta)\psi, ((R_{\mathbf{d}}(--\theta)\mathbf{e})\cdot\sigma)U_{\mathbf{d}}(-\theta)\psi >,$$

wobei die Spinwellenfunktion ψ beliebig ist. Setzt man an Stelle von ψ nun $\varphi = U_{\mathbf{d}}(\theta)\psi$ ein, dann gilt ebenso

$$< \psi, U_{\mathbf{d}}^{+}(\theta)(\mathbf{e}\cdot\sigma)U_{\mathbf{d}}(\theta)\psi > \quad = \quad < \psi, (R_{\mathbf{d}}(-\theta)\mathbf{e})\cdot\sigma\psi >$$

für alle ψ.