Technische Universität Berlin — 27.01.08
Institut für Theoretische Physik — **Abgabe:** 04.02.08
Prof. Dr. K.-E.Hellwig

6. Übungsblatt zur Quanteninformationstheorie I u.II

Nächste Übung: Fr.,04.02.08, 10:00, Raum PN-733

Aufgabe 16 (4 Punkte): Seien $\{\tilde{\varphi}_k\}_{k=1,2,\ldots,K}$ und $\{\tilde{\psi}_l\}_{l=1,2,\ldots,L}$ Vektoren eines Hilbertraums, für die lediglich $\sum_{k=1}^K \|\tilde{\varphi}_k\|^2 = 1$ und $\sum_{l=1}^L \|\tilde{\psi}_l\|^2 = 1$, und o.B.d.A $K \geq L$ gelten ssoll. Dann sind $\rho = \sum_{k=1}^K |\tilde{\varphi}_k >< \tilde{\varphi}_k|$ und $\sigma = \sum_{l=1}^L |\tilde{\psi}_l >< \tilde{\psi}_l|$ Dichteoperatoren. **Man zeige**: Es gilt $\rho = \sigma$ genau dann, wenn es eine unitäre $(K \times K)$ Matrix $((w_{kk'}))$ gibt, für die $\tilde{\psi}_l = \sum_{k=1}^K w_{lk}\tilde{\varphi}_k$ ist. (*Anleitung*: Man überzeuge sich zunächst davon, dass die Bedingung für die Gleichheit hinrreicht und betrachte dann $\rho = \sigma = \sum_{m=1}^M |\tilde{\phi}_m >< \tilde{\phi}_m|$ mit $< \tilde{\phi}_m|\tilde{\phi}_n = \delta_{mn}\|\tilde{\phi}_n\|^2$ und $\sum_{m=1}^M \|\tilde{\phi}_m\|^2 = 1$.)

Aufgabe 17 (3 Punkte): Sei $\{\phi_\nu\}$ ein vollständiges Orthonormalsystem in einem Hilbertraum und $A = \sum_{\nu\mu} a_{\nu\mu}|\phi_\nu >< \phi_\mu|$. **Man zeige**: Die Abbildungen $A \mapsto \bar{A} := \sum_{\nu\mu} \bar{a}_{\nu\mu}|\phi_\nu >< \phi_\mu|$ und $A \mapsto A^T := \sum_{\nu\mu} \bar{a}_{\mu\nu}|\phi_\nu >< \phi_\mu|$ hängen von der gewählten Basis $\{\phi_\nu\}$ ab, während ihre Komposition $A \mapsto A^+$ basisunabhängig ist. Man bestimme die Klasse der Basen, für die die Komplexkonjugation und $\bar{A}$ mit der in $\{\phi_\nu\}$ und die Klasse der Basen in für die die Transposition A^T mit der in $\{\phi_\nu\}$ ubereinstimmen.

Aufgabe 18 (3 Punkte): **Man zeige**, dass die Abbildungen $A \mapsto \bar{A}$ und $A \mapsto A^T$ positiv sind und für postive Spurklasseoperatoten die Spur erhalten bleibt. Wie ändert sich die Spur bei allgemeinen Spurklasseoperatoren unter diesen Abbildungen? Seien $A \mapsto \bar{A}^{(i)}$ und $A \mapsto A^{T_i}$ Komplexkonjugation und Transposition bezüglich verchiedener Basen $\{\phi_\nu^{(i)}\}$, $i = 1, 2$. Welche Verküpfungen bestehen zwischen $\bar{A}^{(1)}$ und $\bar{A}^{(2)}$ und welche zwischen $A^{T_{i1}}$ und A^{T_2}?