Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik

13. Januar 2009

Prof. Dr. H.-H. v. Borzeszkowski, Dr. T. Chrobok, S.Heidenreich

11. Übungsblatt – Allgemeine Relativitätstheorie II

Abgabe: 27.1.2009

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe in Dreiergruppen ist erwünscht.

Aufgabe 13 (10 Punkte): *Hamiltonsche Formulierung der ART*

(i) Zeigen Sie, dass die zweite Fundamentalform einer raumartigen Hyperfläche $K_{\alpha\beta} := h^{\kappa}_{\alpha} h^{\lambda}_{\beta} \nabla_{(\lambda} n_{\kappa)}$ (worin n_α mit $n_\alpha n^\alpha = 1$ der Einheits-Normalenvektor auf der raumartigen Hyperfläche und $h^{\kappa}_{\alpha} = \delta^{\kappa}_{\alpha} - n_\alpha n^\kappa$ der Projektor auf die raumartige Hyperfläche sind), ebenfalls in der Form $K_{\alpha\beta} = D_{(\alpha} n_{\beta)}$ geschrieben werden kann. Darin bezeichnet $D_\alpha := h^{\kappa}_{\alpha} \nabla_\kappa$ die kovariante Ableitung auf der Hyperfläche.

(ii) Leiten Sie aus der Lagrange-Dichte $\mathcal{L} = N\sqrt{\gamma}(R^{(3)} + K_{\alpha\beta}K^{\alpha\beta} - K^2)$ und der zweiten Fundamentalform $K_{\alpha\beta} = \frac{1}{2N}(\dot{h}_{\alpha\beta} - 2D_{(\alpha}N_{\beta)})$ die kanonischen Impulse $\pi_{\alpha\beta} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{h}_{\alpha\beta}} = \sqrt{\gamma}\,(Kh_{\alpha\beta} - K_{\alpha\beta})$ ab.
Beachten Sie, dass N, γ und $R^{(3)}$ nicht Funktion von $K_{\alpha\beta}$ sind. Weiterhin ist es enorm hilfreich anstatt $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{h}_{\alpha\beta}}$ den Ausdruck $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K_{\delta\gamma}} \frac{\partial K_{\delta\gamma}}{\partial \dot{h}_{\alpha\beta}}$ zu berechnen.

(iii) Bestimmen Sie damit die Hamilton-Dichte $\mathcal{H} = \pi_{\alpha\beta}\dot{h}^{\alpha\beta} - \mathcal{L}$.

Aufgabe 14 (10 Punkte): *Hamiltonsche Formulierung der ART-Friedmann-Robertson-Walker Raumzeiten*

Betrachten Sie die Friedmann-Robertson-Walker Raumzeiten

$$ds^2 = dt^2 - S^2(t)^{(3)}g_{ij}dx^i dx^j \tag{1}$$

und die gewählte Eichung $N = 1$ und $N^j = 0$. Damit ergibt sich

$$\sqrt{-g} = \sqrt{\gamma} = S^3\sqrt{^{(3)}g} \tag{2}$$

worin ${}^{(3)}g = det^{(3)}g_{ij}$ die Determinate der Metrik eines Raumes konstanter Krümmung bezeichnet. Der Krümmungsskalar R ergibt sich dann zu

$$R = 6\left(\frac{\ddot{S}}{S} + \left(\frac{\dot{S}}{S}\right)^2 + \frac{k}{S^2}\right). \tag{3}$$

a) Bestimmen Sie die Lagrangedichte für diese Raumzeiten.
b) Man kann zeigen, dass der 3-Krümmungsskalar für Räume mit konstanter Krümmung k die Gestalt ${}^{(3)}R = -6kS^{-2}$ hat. Benutzten Sie dies um im Ergebnis aus a) den Krümmungsparameter k zu eliminieren.
c) Bestimmen Sie die zweite Fundamentalform K_{ij} für die betrachtete Eichung. (Man erinnere sich an die in der 10. Übung (ii) gezeigte Darstellung.)
d) Berechnen Sie die Spur der zweiten Fundamentalform, und bestimmen Sie die kanonoisch konjugierten Impulse

$$\pi_{\alpha\beta} = \sqrt{\gamma}(Kh_{\alpha\beta} - K_{\alpha\beta}) \tag{4}$$

und deren Spur $\pi = \pi^{\alpha}{}_{\alpha}$ und kontravariante Darstellung $\pi^{\alpha\beta}$.
e) Bestimmen Sie die hamiltonsche Dichte der betrachteten Raumzeitmodelle.

f) Für räumlich-flache Robertson-Walker-Modelle, d.h. ${}^{(3)}R = 0$ kann man die hamiltonsche Dichte auch schreiben als

$$H = -\frac{1}{S}\pi_S^2 \tag{5}$$

mit dem Impuls $\pi_S = -S\dot{S}$. Geben Sie die Wheeler-DeWitt-Gleichung für den betrachteten Minisuperraum an, indem Sie zum Impulsoperator $\Pi_S = i\hbar\frac{\partial}{\partial S}$ übergehen. Was ist bei diesem Übergang zu beachten?

Vorlesung:	• Mittwoch 16:15 Uhr – 17:45 Uhr im EW 229
Übung:	• Dienstag 14:15 Uhr – 15:45 Uhr im EW 114
Scheinkriterien:	• Mindestens 50% der Übungspunkte.
Sprechzeiten:	• Prof. H.-H. v- Borzeszkowski: EW 740 n. V.
	• Dr. Thoralf Chrobok: Mo, 14:00–15:00 Uhr im EW 740
	• Dipl-Phys. Sebastian Heidenreich: Do, 11:30–12:30 Uhr im EW 702

Die Anmeldung muss bis zum 3.11.2008 22:59 Uhr unter
https://wwwitp.physik.tu-berlin.de/cgi-bin/lvdb/anmeldung.py?id=ws08_art2
erfolgen.