Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik

20. Januar 2009

Prof. Dr. H.-H. v. Borzeszkowski, Dr. T. Chrobok, S.Heidenreich

12. Übungsblatt – Allgemeine Relativitätstheorie II

Abgabe: 10.02.2009

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe in Dreiergruppen ist erwünscht.

Aufgabe 15 (40 Punkte): *Projekt (Bonus): Dirac-Fermionen in gekrümten Räumen: Einsteinsches Äquivalenzprinzip*

In der modernen Physik bilden die Quantentheorie (QT) und die Relativitätstheorie (RT) das Fundament zur Beschreibung von Naturphänomenen. Damit die Natur einheitlich durch eine Theorie beschrieben werden kann, muss die QT mit der RT zur Quantengravitation vereinigt werden. Besondere Schwierigkeiten ergeben sich insbesondere durch unterschiedlichen Konzepte der Theorien. Eine semiklassische Beschreibung von Quantenobjekten in der Allgemeinen Relativitätstheorie kann erste wichtige Einsichten liefern. Eine wesentliche Frage ist z. B., ob das Einsteinsche Äquivalenzprinzip im Quantenbereich verletzt wird. Betrachten wir hier Fermionen im Gravitationsfeld und vernachlässigen die Wirkung der Teilchen auf die Geometrie. Die Beschreibung erfolgt durch die Dirac-Gleichung in gekrümmten Räumen

$$(i\hbar\gamma^\alpha D_\alpha - mc)\psi = 0, \tag{1}$$

wobei

$$D_\alpha = e^\mu_\alpha \partial_\mu + \frac{1}{8}[\gamma^\delta, \gamma^\beta]\ \gamma_{\delta\beta\alpha}, \tag{2}$$

wobei $\gamma_{\delta\beta\alpha}$ die Ricci-Rotationskoeffizienten sind (aus der Übung). Hierbei wurde die Abkürzung $\hat{\sigma}_{\alpha\beta} := \frac{i}{2}[\gamma^\alpha\gamma^\beta]$ verwendet. Hierbei sind γ^α die Dirac-Matrizen. Betrachten Sie nun die folgende konformstationäre Raumzeit:

$$ds^2 = V^2(dx^0)^2 - W^2(d\mathbf{x}\cdot d\mathbf{x}), \tag{3}$$

mit $x^0 = ct$ und $W = W(\mathbf{x})$, $V = V(\mathbf{x})$. Wählen Sie für die Tetrade

$$e^{\hat{0}}_i = V\delta^0_\mu,\ e^{\hat{i}}_\mu = W\delta^i_\mu,\ \ a = 1, 2, 3. \tag{4}$$

1. Bestimmen Sie den zu (2) gehörigen Hamiltonoperator $\hat{\mathcal{H}}$, wobei $i\hbar\partial_t\psi = \hat{\mathcal{H}}\psi$.
2. Im nächsten Schritt werden die Spinorfelder $\psi' = W^{3/2}\psi$ transformiert. Zeigen Sie, dass sich $\hat{\mathcal{H}}$ entsprechend zu

   $$\hat{\mathcal{H}}' = \beta mc^2 V + \frac{c}{2}[(\alpha\cdot\mathbf{p})\frac{V}{W} + \frac{V}{W}(\alpha\cdot\mathbf{p})] \tag{5}$$

   transformiert.
   Zur Bestimmung des nichtrelativistischen Limes ist es notwendig den Hamiltonoperator in die Newton-Wigner zu transformieren. Das Kriterium hierfür ist, dass sich der Energievorzeichenoperator $\Lambda := \hat{\mathcal{H}}/\sqrt{\hat{\mathcal{H}}}$ zu β transformiert, d.h.

   $$U\Lambda U^\dagger = \beta. \tag{6}$$

   Es kann gezeigt werden, dass der unitäre Operator $U = U_2U_1$ mit

   $$U_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + J\Lambda),\ U_2 = \frac{1}{2}(1 + \beta J), \tag{7}$$

   wobei $J = i\gamma_5\beta,\ \gamma_5 = -i\gamma^{\hat{0}}\gamma^{\hat{1}}\gamma^{\hat{2}}\gamma^{\hat{3}}$ ist, diese Eigenschaft besitzt.

3. Berechnen Sie den transformierten Hamiltonoperator und bringen Sie diesen auf die Form

$$\hat{\mathcal{H}}' = U\hat{\mathcal{H}}U^\dagger = [\sqrt{\hat{\mathcal{H}}^2}]\beta + \sqrt{\hat{\mathcal{H}}^2}J. \tag{8}$$

   Die Klammern bezeichen den geraden bzw. ungeraden Anteil des Operators, dh.

$$[Q] := \frac{1}{2}(Q + \beta Q \beta),\ Q := \frac{1}{2}(Q - \beta Q \beta). \tag{9}$$

4. Bestimmen Sie $\hat{\mathcal{H}}'$ für die in (3) angegebenen Raumzeit.
   Hinweis:
   Entwickeln Sie die Wurzel durch $\sqrt{\hat{\mathcal{H}}^2} = \sqrt{m^2c^4V^2 + Rest} \approx mc^2V + ...$
   Im letzten Schritt soll der transformierte Hamiltonian für einen Minkowskiraum in einem beschleunigten Bezugssystem

$$V = 1 + \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{x}}{c^2},\ W = 1 \tag{10}$$

   und der Schwachfeldnäherung der Schwarzschildraumzeit in isotropen Koordinaten

$$V = 1 - \frac{GM}{c^2 r},\ W = 1 + \frac{GM}{2c^2 r}, \tag{11}$$

   wobei $r = \mathbf{x}\cdot\mathbf{x}$ bestimmt werden.

5. Berechnen Sie $\hat{\mathcal{H}}'$ für beide Metriken. Vergleichen Sie die einzelnen Terme. Was fällt auf? Diskutieren Sie Ihr Ergebnis hinsichtlich des Einsteinschen Äquivalenzprinzips.

Vorlesung:	• Mittwoch 16:15 Uhr – 17:45 Uhr im EW 229
Übung:	• Dienstag 14:15 Uhr – 15:45 Uhr im EW 114
Scheinkriterien:	• Mindestens 50% der Übungspunkte.
Sprechzeiten:	• Prof. H.-H. v- Borzeszkowski: EW 740 n. V.
	• Dr. Thoralf Chrobok: Mo, 14:00–15:00 Uhr im EW 740
	• Dipl-Phys. Sebastian Heidenreich: Do, 11:30–12:30 Uhr im EW 702

Die Anmeldung muss bis zum 3.11.2008 22:59 Uhr unter
https://wwwitp.physik.tu-berlin.de/cgi-bin/lvdb/anmeldung.py?id=ws08_art2
erfolgen.