Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik

4. November 2008

Prof. Dr. H.-H. v. Borzeszkowski, Dr. T. Chrobok, S.Heidenreich

# 3. Übungsblatt – Allgemeine Relativitätstheorie II

**Abgabe: Di. 11.11.2008 14:00 Uhr**

*Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe in Dreiergruppen ist erwünscht.*

**Aufgabe 3 (10 Punkte):** *Einsteinsche Feldgleichungen aus dem Variationsprinzip nach Palatini*

Für eine geeignete Lagrangedichte $\mathcal{L}$ lassen sich die Einsteinschen Feldgleichungen aus dem Variationprinzip ableiten, indem man $\mathcal{L}$ nach der Metrik $g_{\alpha\beta}$ variiert. Nimmt man ferner an, dass neben der Metrik $g_{\mu\nu}$ der Zusammenhang $\Gamma$ und deren ersten Ableitungen unabhängige Variablen der Lagrangedichte sind, dann läßt sich durch die Variation nach $\Gamma$ der Christoffel-Zusammenhang ableiten (Palatini-Zugang).
Betrachten Sie die folgende Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g}(R - 2\kappa L_F), \tag{1}$$

wobei der Ricci-Skalar $R$ den Lagrangian für das Gravitationsfeld darstellt und $\kappa = \frac{8\pi G}{c}$. Mit $L_F$ ist der Lagrangian für alle weiteren Felder bezeichnet worden.

1. Leiten Sie durch Variation der Lagrangedichte (1) nach der Metrik $g_{\mu\nu}$ die Einsteinschen Feldgleichungen her.
   *Hinweise:*
   - Zeigen Sie zunächst, dass sich der Term
     $$\int \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} d^4x \tag{2}$$
     in ein Oberflächenintegral umwandeln lässt. Hierbei ist es nützlich Tensoridentitäten mit Hilfe lokal geodätischer Koordinaten abzuleiten.
   - Der Energie-Impulstensor ist definiert durch
     $$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \left( \frac{\partial \sqrt{-g} L_F}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \sqrt{-g} L_F}{\partial g^{\mu\nu}{}_{,\alpha}} \right). \tag{3}$$

2. Zeigen Sie, dass die Variation der Lagrangedichte (1) nach $\Gamma$ auf den Christoffel-Zusammenhang führt, dh.
   $$\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} \left( g_{\lambda\alpha,\beta} + g_{\lambda\beta,\alpha} - g_{\alpha\beta,\lambda} \right) \tag{4}$$

   *Hinweise:*
   - Die kovariante Ableitung einer kontravarianten Tensordichte mit dem Gewicht $+1$ ($\mathcal{T}$) ist gegeben durch:
     $$\mathcal{T}^{\mu\nu}{}_{;\rho} = \mathcal{T}^{\mu\nu}{}_{,\rho} + \Gamma^\mu_{\rho\alpha} \mathcal{T}^{\alpha\nu} + \Gamma^\nu_{\rho\alpha} \mathcal{T}^{\mu\alpha} - \Gamma^\sigma_{\sigma\rho} \mathcal{T}^{\mu\nu} \tag{5}$$
   - Es wird Torsionsfreiheit und Metrizität des Zusammenhangs vorausgesetzt, d.h. $\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = \Gamma^\mu_{\beta\alpha}$ und $g_{\mu\nu;\alpha} = 0$.

| | |
|---|---|
| Vorlesung: | • Mittwoch 16:15 Uhr – 17:45 Uhr im EW 229 |
| Übung: | • Dienstag 14:15 Uhr – 15:45 Uhr im EW 114 |
| Scheinkriterien: | • Mindestens $50\%$ der Übungspunkte. |
| Sprechzeiten: | • Prof. H.-H. v- Borzeszkowski: EW 740 n. V.<br>• Dr. Thoralf Chrobok: Mo, 14:00–15:00 Uhr im EW 740<br>• Dipl-Phys. Sebastian Heidenreich: Do, 11:30–12:30 Uhr im EW 702 |

Die Anmeldung muss bis zum 3.11.2008 22:59 Uhr unter
**https://wwwitp.physik.tu-berlin.de/cgi-bin/lvdb/anmeldung.py?id=ws08_art2**
erfolgen.