Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik

25. November 2008

Prof. Dr. H.-H. v. Borzeszkowski, Dr. T. Chrobok, S.Heidenreich

6. Übungsblatt – Allgemeine Relativitätstheorie II

Abgabe: Di. 02.12.2008 14:00 Uhr

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe in Dreiergruppen ist erwünscht.

Aufgabe 6 (4 Punkte): *Energie-Impuls-Tensor einer Gravitationswelle (I)*

Für kleine Abweichungen von der flachen Raumzeit kann die Einsteinsche Theorie linearisiert werden. Die Metrik

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} + \mathcal{O}(h^2)$$

soll nun durch die linearen Störungen $h_{\mu\nu}$ beschrieben werden. Für das Gravitationsfeld $\overline{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}h^\alpha_\alpha \eta_{\mu\nu}$ kann eine freie Wellengleichung abgeleitet werden:

$$\Box \overline{h}_{\mu\nu} = 0.$$

Zeigen Sie, dass der Energie-Impuls-Tensor einer Gravitationswelle

$$t_{\mu\nu} = \frac{c^4}{8\pi G}(R^{(2)}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}(g_{\mu\nu}R)^{(2)}) \tag{1}$$

im Falle einer quellfreien Lösung äquivalent zu

$$t_{\mu\nu} = \frac{c^4}{16\pi G}(2R^{(2)}_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma}R^{(2)}_{\rho\sigma}) \tag{2}$$

ist. Bitte beachten Sie dabei, dass man in der linearen Näherung rechnet und eine *freie* Gravitationswelle beschreibt.

Aufgabe 7 (6 Punkte): *Energie-Impuls-Tensor einer Gravitationswelle (II)*
In Aufgabe 6 wurde gezeigt, dass der Energie-Impuls-Tensor der freien Gravitationswelle nur vom Ricci-Tensor 2. Ordnung abhängt.

1. Zeigen Sie zunächst, dass

$$R^{(2)}_{\mu\kappa} = \eta^{\lambda\nu}R^{(2)}_{\lambda\mu\nu\kappa} - h^{\lambda\nu}R^{(1)}_{\lambda\mu\nu\kappa} \tag{3}$$

gilt.

2. Zeigen Sie mit Hilfe von Gleichung (3), der Definition des Krümmungstensors

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = \frac{1}{2}(g_{\lambda\nu,\mu,\kappa} + g_{\mu\kappa,\lambda,\nu} - g_{\mu\nu,\lambda,\kappa} - g_{\lambda\kappa,\mu,\nu}) + g_{\eta\sigma}(\Gamma^\eta_{\nu\lambda}\Gamma^\sigma_{\mu\kappa} - \Gamma^\eta_{\kappa\lambda}\Gamma^\sigma_{\mu\nu}) \tag{4}$$

und den Christoffelsymbolen 1. Ordnung

$$\Gamma^\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(h^\sigma{}_{\mu,\nu} + h^\sigma{}_{\nu,\mu} - h_{\mu\nu}{}^{,\sigma}), \tag{5}$$

dass der Ricci-Tensor 2. Ordnung für ein lineariertes Gravitationsfeld die Form

$$\begin{aligned} R^{(2)}_{\mu\kappa} = &-\frac{1}{4}(h_{\sigma\kappa,\nu} + h_{\sigma\nu,\kappa} - h_{\kappa\nu,\sigma})(h_\mu{}^{\sigma,\nu} + h^{\sigma\nu}{}_{,\mu} - h_\mu{}^{\nu,\sigma}) \\ &-\frac{h^{\lambda\nu}}{2}(h_{\lambda\nu,\mu,\kappa} + h_{\mu\kappa,\lambda,\nu} - h_{\mu\nu,\lambda,\kappa} - h_{\lambda\kappa,\mu,\nu}) \end{aligned} \tag{6}$$

hat. Es ist dabei zu beachten, dass $h_{\mu\nu}$ Lösung der freien Wellengleichung ist für die die Eichbedingung $2h^\nu{}_{\mu,\nu} = h^\nu{}_{\nu,\mu}$ gilt. Ansonsten Terme höherer Ordnung vernachlässigen.

3. Zeigen Sie, dass sich der Energie-Impuls-Tensor für eine Welle $h_{\mu\nu} = e_{\mu\nu} e^{-ik_\lambda x^\lambda} + cc.$ im Zeitmittel vereinfacht zu

$$< t_{\mu\nu} >= \frac{c^4}{16\pi G} k_\mu k_\nu (e^{\lambda\kappa^*} e_{\lambda\kappa} - \frac{1}{2}|e^\lambda{}_\lambda|^2). \tag{7}$$

4. Geben Sie $< t_{\mu\nu} >$ für eine linear polarisierte Welle an! Wie lautet die Energiestromdichte $\Phi = c < t^{03} >$ einer linearen polarisierten Welle?

Vorlesung:	• Mittwoch 16:15 Uhr – 17:45 Uhr im EW 229
Übung:	• Dienstag 14:15 Uhr – 15:45 Uhr im EW 114
Scheinkriterien:	• Mindestens 50% der Übungspunkte.
Sprechzeiten:	• Prof. H.-H. v- Borzeszkowski: EW 740 n. V. • Dr. Thoralf Chrobok: Mo, 14:00–15:00 Uhr im EW 740 • Dipl-Phys. Sebastian Heidenreich: Do, 11:30–12:30 Uhr im EW 702

Die Anmeldung muss bis zum 3.11.2008 22:59 Uhr unter
https://wwwitp.physik.tu-berlin.de/cgi-bin/lvdb/anmeldung.py?id=ws08_art2
erfolgen.