

7. Übungsblatt – Allgemeine Relativitätstheorie II**Abgabe: Di. 16.12.2008 14:00 Uhr**

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe in Dreiergruppen ist erwünscht.

Aufgabe 8 (10 Punkte): Raychaudhuri-Gleichung

Betrachten Sie einen allgemeinen Energie-Impuls-Tensor der Form

$$(1) \quad T_{ab} = \mu u_a u_b + p h_{ab} + 2u_{(a} q_{b)} + \pi_{ab},$$

mit den Eigenschaften $u^a q_a = 0$, $\pi^a_a = 0$, $\pi_{ab} u^a = 0$, wobei u^a ein zeitartiges Vektorfeld, μ die Energiedichte, p den Druck, q^a den Wärmestrom, π_{ab} den anisotropen Druck und $h_{ab} = g_{ab} + u_a u_b$ den Projektionstensor auf den zu u^a orthogonalen Unterraum bezeichnen. Es gelte weiterhin $u_a u^a = -1$. Die Feldgleichungen lauten $R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} = \kappa T_{ab}$.

1. Leiten Sie für ein zeitartiges Vektorfeld u_a aus der Ricci-Identität

$$(2) \quad u_{a;c;d} - u_{a;d;c} = R_{abcd} u^b$$

durch Überschieben mit \mathbf{u} und Kontraktion über das verbleibende Indexpaar die Propagationsgleichung für die Expansion (Raychaudhuri-Gleichung):

$$(3) \quad \dot{\Theta} = 2(\omega^2 - \sigma^2) + (\dot{u}^a)_{;a} - \frac{1}{3} \Theta^2 - \frac{1}{2} \kappa (\mu + 3p)$$

ab (Bezeichnungen laut Übung).

2. Die Raychaudhuri-Gleichung besitzt nicht nur für die Kosmologie sondern auch für andere allgemein-relativistische Probleme eine große Bedeutung. Betrachten Sie ein vereinfachtes sphärisches statisches Sternmodell (Welche kinematischen Größen verschwinden? Warum?). Leiten Sie die dafür geltende Raychaudhuri-Gleichung ab.
3. Bestimmen Sie für eine ideale Flüssigkeit die Abhängigkeit zwischen der Beschleunigung und den verbleibenden Größen in der Raychaudhuri-Gleichung, sowie die Zeitabhängigkeit der Energiedichte für das sphärisch-statische Sternmodell aus der Energie-Impuls-Bilanz. Diskutieren Sie die auftretenden Gleichungen im Vergleich zu den Newtonschen

$$(4) \quad \dot{u}_a = -\frac{p_{,a}}{\rho}$$

$$(5) \quad (\dot{u}^a)_{;a} = \frac{1}{2} \rho$$

im Hinblick auf die allgemein-relativistischen Besonderheiten, (hier bezeichnen ρ die Masendichte und p den Druck).

4. *Bonus* Betrachten Sie die Metrik der Robertson-Walker Raumzeiten (der Parameter $\epsilon = 0, \pm 1$ gibt die räumliche Krümmung an)

$$(6) \quad ds^2 = -dt^2 + S^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - \epsilon r^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right)$$

und bestimmen Sie die Raychaudhuri-Gleichung für diesen Fall explizit. Vergleichen Sie diese mit den gewöhnlichen Friedmann Gleichungen.

- | | |
|------------------|---|
| Vorlesung: | • Mittwoch 16:15 Uhr – 17:45 Uhr im EW 229 |
| Übung: | • Dienstag 14:15 Uhr – 15:45 Uhr im EW 114 |
| Scheinkriterien: | • Mindestens 50% der Übungspunkte. |
| Sprechzeiten: | • Prof. H.-H. v- Borzeszkowski: EW 740 n. V. • Dr. Thoralf Chrobok: Mo, 14:00–15:00 Uhr im EW 740 • Dipl-Phys. Sebastian Heidenreich: Do, 11:30–12:30 Uhr im EW 702 |

Die Anmeldung muss bis zum 3.11.2008 22:59 Uhr unter
https://www.itp.physik.tu-berlin.de/cgi-bin/lvdb/anmeldung.py?id=ws08_art2
erfolgen.