

3. Übungsblatt zur Theoretische Physik I Mechanik

Abgabe: Montag 10.11. bis 12:00 in den Briefkasten

Unbedingt den eigenen Namen und Matrikelnr. sowie den Namen des Tutors und das Tutorium angeben. **Der Zettel wird sonst nicht korrigiert!** Es werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte.

Achtung, folgende Tutorien sind umgezogen:

Tutor	Termin	Neuer Raum
Valentin	Mi 12-14	EW-731
David	Mi 14-16	EW-184
Malte	Do 14-16	EW-226
David	Fr 10-12	EW-184

Aufgabe 8 (10 Punkte): *Hamilton'sches Prinzip*

Zeigen Sie, dass das Funktional

$$S[q] := \int_{t_0}^{t_1} dt L(q(t), \dot{q}(t), t)$$

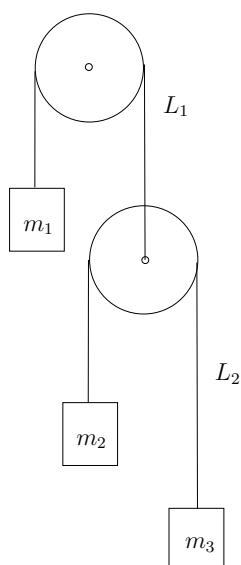
extremal wird, wenn $q(t)$ die Euler-Lagrange-Gleichungen $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$ erfüllt.

Machen Sie dazu den Ansatz $q(t) = q_0(t) + \varepsilon \psi(t)$, wobei $\psi(t_0) = \psi(t_1) = 0$ ist, und setzen Sie

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{d}{d\varepsilon} S[q_0 + \varepsilon \psi] \Big|_{\varepsilon=0} .$$

Motivieren Sie den Ansatz und erläutern Sie das Vorgehen.

Aufgabe 9 (10 Punkte): *Doppelte Atwood-Fallmaschinen*



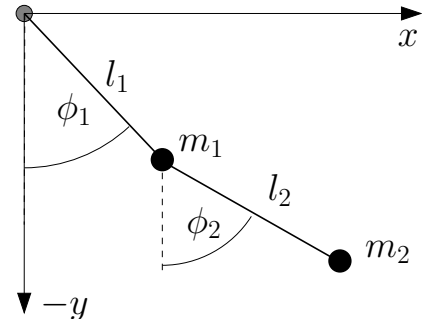
Die doppelte Atwood'sche Fallmaschine besteht aus zwei aneinander gehängten Fallmaschinen.

1. Stellen Sie die potentielle und die kinetische Energie des Systems in kartesischen Koordinaten auf.
2. Führen Sie verallgemeinerte Koordinaten ein und stellen Sie die Lagrangefunktion in diesen Koordinaten auf. (Vernachlässigen Sie den Radius der Rollen.)
3. Leiten Sie die Bewegungsgleichungen im Lagrange-II-Formalismus her und lösen Sie diese für beliebige Anfangsbedingungen.

3. Übung TPI WS08/09

Aufgabe 10 (20 Punkte): Doppelpendel

Das mathematische Doppelpendel besteht aus zwei Massen m_1 und m_2 , die durch zwei masselose Stäbe untereinander und mit dem Aufhängepunkt verbunden sind. Es wirke die Gravitationskraft in Richtung $-\mathbf{e}_y$.



1. Stellen Sie die Lagrangefunktion des Systems bzgl. der verallgemeinerten Koordinaten ϕ_1 und ϕ_2 auf.
2. Berechnen Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen. Das Ergebnis lautet:

$$0 = \ddot{\phi}_1 + \frac{g}{l_1} \sin \phi_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{l_2}{l_1} \left[\cos(\phi_2 - \phi_1) \ddot{\phi}_2 + \sin(\phi_1 - \phi_2) \dot{\phi}_2^2 \right] \quad (1)$$

$$0 = \ddot{\phi}_2 + \frac{g}{l_2} \sin \phi_2 + \frac{l_1}{l_2} \left[\ddot{\phi}_1 \cos(\phi_2 - \phi_1) - \sin(\phi_1 - \phi_2) \dot{\phi}_1^2 \right] \quad (2)$$

3. Für kleine Winkel gilt näherungsweise: $\cos \phi \approx 1$, $\sin \phi \approx \phi$ und $\dot{\phi}^2 \phi \approx 0$. Bestimmen Sie die Frequenzen der Normalschwingungen in dieser Näherung für den Fall $l_1 = l_2 = l$. *Tipp:* Siehe Normalschwingungen in VL und der englischen Wikipedia.
4. Benutzen Sie Mathematica oder ein ähnliches Programm, um die Differentialgleichung auch für große Winkel für die folgenden Fälle numerisch zu lösen. Stellen Sie $\phi_1(t)$ und $\phi_2(t)$ graphisch dar, sowie $\phi_2(t)$ über $\phi_1(t)$ und interpretieren Sie die Ergebnisse.

- (a) $m_1 \ll m_2$, $l_1 \gg l_2$, $\phi_1(0) = \phi_2(0) = \dot{\phi}_2(0) = 0$, $\dot{\phi}_1(0) = v_0$
- (b) $m_1 \gg m_2$, $l_1 \ll l_2$, $\phi_1(0) = \phi_2(0) = \dot{\phi}_2(0) = 0$, $\dot{\phi}_1(0) = v_0$
- (c) $m_1 = m_2 = m$, $l_1 = l_2 = l$, $\phi_1(0) \neq 0$, $\phi_2(0) \neq 0$, $\dot{\phi}_1(0) \neq 0$, $\dot{\phi}_2(0) = 0$
- (d) $m_1 = 100 \cdot m_2$, $l_1 = 10 \cdot l_2 = l$, $\phi_1(0) \neq 0$, $\phi_2(0) \neq 0$, $\dot{\phi}_1(0) \neq 0$, $\dot{\phi}_2(0) = 0$

Bonus: Stellen Sie das Pendel für die Fälle (c) und (d) (z.B. in Mathematica) graphisch dar und erstellen Sie eine Animation der Bewegung. Die Animationen können per Email oder durch Angabe eines Links eingereicht werden.

Hilfe zu Mathematica:

In Mathematica gibt es die Funktion `NDSolve` mit der man Differentialgleichungen numerisch lösen kann. Folgendes Beispiel löst den schiefen Wurf (das Zeichen `/.` bedeutet in Mathematica ersetzen durch):

```
(* Die Option MaxSteps ist für das Pendel wichtig,
damit die Lsg. nicht divergiert *)
m=1; g=10; vx=1.0; vy=2.0;
lsg = NDSolve[{x''[t]==0, y''[t]==-m g, x[0]==0, y[0]==0,
              x'[0]==vx, y'[0]==vy},{x,y},{t,0,1}, MaxSteps->500000];
```

```
(* Plot von x und y als Funktionen von t: *)
Plot[{x[t],y[t]}/.lsg, {t,0,0.2}]
```

```
(* Plot der Lösung in der (x,y)-Ebene: *)
ParametricPlot[{x[t],y[t]}/.lsg, {t,0,0.2}]
```