

7. Übungsblatt zur Theoretische Physik I Mechanik

Abgabe: Montag 8.12. bis 12:00 in den Briefkasten

Unbedingt den eigenen Namen und Matrikelnr. sowie den Namen des Tutors und das Tutorium angeben. **Der Zettel wird sonst nicht korrigiert!** Es werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte.

Aufgabe 23 (8 Punkte): Poisson-Klammer

1. Berechnen Sie die fundamentalen Poissonklammern

$$(a) \{q_i, q_k\}, \quad (b) \{p_i, p_k\}, \quad (c) \{q_i, p_k\} .$$

und zeigen Sie, dass diese sich mit der kompakten Notation $\mathbf{x} = (\mathbf{q}, \mathbf{p})$ als

$$\{x_i, x_j\} = -I_{ij}$$

schreiben lassen, wobei I die symplektische Eins ist.

2. Zeigen Sie die Produktregel:

$$\{f g, h\} = f \{g, h\} + \{f, h\} g .$$

Aufgabe 24 (10 Punkte): Harmonischer Oszillator: Kanonische Transformation

In dieser Aufgabe soll der harmonische Oszillator mit Hilfe von einer kanonischen Transformation gelöst werden. Diese Methode ist für die quantenmechanische Beschreibung des harmonischen Oszillators wichtig.

1. Zeigen Sie, dass die Transformation

$$Q = p + i a q, \quad P = \frac{p - i a q}{2 i a} \quad \text{kanonisch ist.}$$

2. Bestimmen Sie eine erzeugende Funktion $F_1(q, Q)$ für die Transformation.
3. Drücken Sie die alten Koordinaten durch die Neuen aus und transformieren Sie die Hamiltonfunktion

$$H = \frac{1}{2m} (p^2 + m^2 \omega^2 q^2)$$

des harmonischen Oszillators in die neuen Koordinaten. Wählen Sie a so, dass die P^2 und Q^2 Terme wegfallen. Wie sehen die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen in den neuen Koordinaten aus?

Aufgabe 25 (10 Punkte): Poissonklammern

1. Leiten Sie die Bewegungsgleichungen des eindimensionalen harmonischen Oszillators aus der dazugehörigen Hamiltonfunktion mittels Poissonklammern her.
2. Zeigen sie, dass eine Funktion $f[q(t), p(t)]$ mit den Poissonklammern $\{A, B\}$ zeitlich entwickelt werden kann, falls $\partial_t f = 0$ gilt:

$$f[q(t), p(t)] = f(0) + t \{f(0), H\} + \frac{t^2}{2!} \{\{f(0), H\}, H\} + \dots$$

7. Übung TPI WS08/09

Aufgabe 26 (12 Punkte): *Phasenraum-Dynamik des mathematischen Pendels*

Wir betrachten in dieser Aufgabe ein *mathematisches* Pendel der Länge r und Masse m .

- Analytischer Teil:
 1. Stellen Sie die Lagrangefunktion des Pendels in den für ein Pendel üblichen Koordinaten auf und berechnen sie den kanonischen Impuls. Wie bezeichnet man den Impuls, der hier auftritt, normalerweise?
 2. Stellen Sie die Hamiltonfunktion auf.
 3. Berechnen Sie das Hamiltonsche Vektorfeld und stellen Sie die Hamiltonschen Gleichungen auf.
- Numerischer Teil: Wählen Sie $m = 1 \text{ kg}$, $r = 1 \text{ m}$ und $g = 1,63 \text{ m s}^{-2}$ (Mondoberfläche).
 1. Stellen Sie die Hamiltonfunktion durch einen Contour-Plot im Phasenraum dar. Stellen Sie einen Bereich des Phasenraumes dar, der die wesentlichen Details enthält (es kann z.B. der Bereich $\phi = -4 \dots 4$ und $p_\phi = -3 \dots 3 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}$ gewählt werden.).
 2. Stellen Sie das Hamiltonsche Vektorfeld im selben Bereich des Phasenraumes dar.
 3. Berechnen Sie den Fluss des Hamiltonschen Vektorfeldes numerisch und stellen Sie diesen in Form eines sogenannten *Phasenportraits* dar, d.h. in einem parametrischen Plot, der nur eine gewisse Anzahl von Flusslinien zeigt. Wählen Sie die Anfangswerte dabei so aus, dass in etwa derselbe Bereich dargestellt wird wie in den anderen Teilaufgaben. Vergleichen Sie das Bild mit dem Contour-Plot der Hamiltonfunktion. Erklären Sie die Ähnlichkeit.

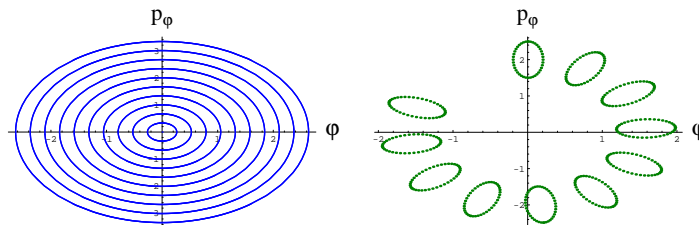


Abbildung 1: Links: Phasenportrait des harmonischen Oszillators, der sich aus der Linearisierung des Pendels ergibt. Rechts: Wanderung eines kleinen Phasenraumgebietes im Falle des harmonischen Oszillators. Beim Pendel sieht das Bildchen natürlich viel schöner aus!

4. Das Phasenportrait zeigt, dass der Phasenraum in zwei verschiedene Teile zerfällt: Punkte, die auf solchen Orbits liegen, die zur Oszillation des Pendels gehören und Punkte, die auf Orbits liegen, die zur Rotation des Pendels gehören. Bestimmen Sie die Trennungslinie dieser Gebiete, die sogenannte *Separatrix*, indem Sie den Wert der Hamiltonfunktion auf dieser Linie (analytisch) ermitteln und daraus die Kurve bestimmen. Zeichnen Sie diese in das Phasenportrait (sichtbar) ein.
- Bonus:** Stellen Sie die Wanderung eines kleinen kreisförmigen Gebietes im Phasenraum unter der Wirkung des Hamiltonschen Flusses grafisch dar. Wählen Sie möglichst ein Gebiet, das die Separatrix berührt oder schneidet.