

9. Übungsblatt zur Theoretische Physik I Mechanik

Abgabe: Montag 5.1.09 bis 12:00 in den Briefkasten

Unbedingt den eigenen Namen und Matrikelnr. sowie den Namen des Tutors und das Tutorium angeben. **Der Zettel wird sonst nicht korrigiert!** Es werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte.

Aufgabe 31 (12 Punkte): Gruppen

1. Zeigen Sie, dass die Matrizen

$$M = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}, \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}, \quad \det M = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$$

eine Gruppe unter Matrixmultiplikation bilden.

2. Jede dieser Matrizen definiert eine Möbiustransformation T der erweiterten Zahlengeraden $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$:

$$T(M) : \quad x \mapsto x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}.$$

Zeigen Sie, dass die Möbiustransformationen unter Komposition eine Darstellung der Matrixengruppe bilden:

$$T(M_1) \circ T(M_2) = T(M_1 M_2).$$

3. Wir schreiben einen Vierervektor $x = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ nun als Matrix

$$g(x) = \begin{bmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{bmatrix}.$$

Ist diese Transformation eindeutig? D.h. kann man aus einer gegebenen Matrix wieder den Vierervektor extrahieren?

Zeigen Sie, dass die Minkowskimetrik von x gegeben ist durch $\det(g(x))$.

4. Sei M eine der Matrizen aus 1. Wir transformieren den Vierervektor x in Matrixdarstellung durch

$$g(x) \mapsto M g(x) M^T.$$

Welche Bedingung muss M erfüllen, damit die Minkowskimetrik erhalten ist und damit M die Darstellung eine Lorentztransformation ist.

Aufgabe 32 (13 Punkte): Winkeltransformation in der speziellen Relativitätstheorie

Es seien Σ und Σ' zwei mit $\underline{v} = v \underline{e}_x$ relativ zueinander bewegte Inertialsysteme. Beantworte die beiden folgenden Fragen mit Hilfe der allgemeinen Lorentztransformation (d.h. ohne Ausnutzung der speziellen Kontraktions- und Dilatationsformeln):

- (a) Ein in Σ ruhender Stab schließt mit der x -Achse einen Winkel von 45° ein. Welchen Winkel schließt er mit der x' -Achse in Σ' ein?
- (b) Ein Teilchen habe in Σ die Geschwindigkeit $\underline{u} = v \underline{e}_y + 2v \underline{e}_x$. Welchen Winkel bildet seine Bahn mit der x -Achse in Σ und Σ' ?

9. Übung TPI WS08/09

Aufgabe 33 (15 Punkte): Wellengleichung

Die Wellengleichung ist eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\partial_{xx}f(x, t) - \frac{1}{c^2}\partial_{tt}f(x, t) = 0$$

die die Ausbreitung von elektromagnetischen Wellen beschreibt. Hierbei ist c die Lichtgeschwindigkeit und $\partial_{xx} := \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ und $\partial_{tt} := \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ sind die zweiten partielle Ableitungen nach Ort und Zeit.

1. Zeigen Sie, dass für jede Funktionen $\phi(\cdot)$ die Funktion $f(x, t) := \phi(x \pm ct)$ eine Lösung der Wellengleichung ist. Wie verhalten sich diese Lösungen anschaulich?

Bei einer Koordinatentransformation

$$\tilde{x} = \tilde{x}(x, t), \quad \tilde{t} = \tilde{t}(x, t), \quad \tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{t}) = f(x, t)$$

transformieren sich Ableitungen gemäß

$$\frac{\partial \bullet}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{x}}{\partial x} \frac{\partial \bullet}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{t}}{\partial x} \frac{\partial \bullet}{\partial \tilde{t}}, \quad \frac{\partial \bullet}{\partial t} = \frac{\partial \tilde{x}}{\partial t} \frac{\partial \bullet}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{t}}{\partial t} \frac{\partial \bullet}{\partial \tilde{t}}$$

wobei \bullet ein Platzhalter für eine beliebige Funktion ist.

2. Transformieren Sie die Wellengleichung mit der Galilei-Transformation

$$\tilde{x} = x + vt, \\ \tilde{t} = t$$

(benutzen Sie die Notation $\partial_{xt} = \partial_{tx} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial t}$).

Ist die Wellengleichung invariant unter Galilei-Transformation (d.h. hat sie in den \sim Koordinaten dieselbe Form)?

3. Zeigen Sie, dass die Wellengleichung invariant unter Lorentz-Transformationen ist

$$\tilde{x} = \gamma(x - vt) \quad \text{mit} \quad \gamma := \left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}} \\ \tilde{t} = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right).$$

Bonusaufgabe 34 (10 Zusatzpunkte): Relativistisch bewegter Stab

Betrachten Sie folgendes zweidimensionales Problem: Ein Stab bewegt sich auf eine Öffnung zu, die sich in ihrem Ruhssystem auf der x -Achse befindet und 9 Meter breit ist. Im Ruhssystem der Öffnung bewegt sich der Stab mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v} = v_x \mathbf{e}_x - v_y \mathbf{e}_y$ auf das Loch zu und zum Zeitpunkt $t = 0$ ist der Schwerpunkt des Stabes mit dem Zentrum der Öffnung identisch. Während der Bewegung ist der Stab immer entlang der x -Achse ausgerichtet sein. Er besitzt in seinem Ruhssystem die Länge 18 Meter.

1. Erklären Sie durch Rechnung, daß für $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{3}$ der Stab ohne Kollision durch das Loch hindurchgeht.
2. Funktioniert der Durchgang auch aus Sicht des Stabes?

Hinweis: Die Lorentz-Transformation für zwei Bezugssysteme, die sich geradlinig gleichförmig zueinander mit einer beliebigen Geschwindigkeit \mathbf{v} bewegen und deren Ursprünge zum Zeitpunkt $t = 0$ zusammenfallen, ist gegeben durch:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + (\gamma - 1)(\mathbf{x} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v}/v^2 - \gamma t\mathbf{v} \\ t' = \gamma t - \gamma \mathbf{v} \cdot \mathbf{x}/c^2 \quad \text{mit} \quad \gamma = \left(\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right)^{-1}.$$