

## 11. Übungsblatt zur Theoretische Physik I Mechanik

**Abgabe:** Montag 26.1. bis 12:00 in den Briefkasten

Name und Matrikelnr. sowie Name des Tutors + Tutorium sind anzugeben.

Kommentare und Zwischenschritte sind niederzuschreiben.

**Klausur: 4. 2. 2009 BEGINN um Punkt 8:00 Uhr** (s.t.) im Raum **ER 270** (Altbau)

### **Aufgabe 38 (10 Punkte):** *Bifurkation*

Gegeben seien folgende Systeme in Form von Differentialgleichungen erster Ordnung: (*Beachte dass das System (5) zweidimensional ist und aus zwei DGL besteht*)

$$\dot{x} = 1 + \mu x + x^2 \quad (1)$$

$$\dot{x} = x - \mu x(1 - x) \quad (2)$$

$$\dot{x} = x + \frac{\mu x}{1 + x^2} \quad (3)$$

$$\dot{x} = x - \frac{\mu x}{1 + x^2} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + \mu x + xy^2 \\ \dot{y} &= x + \mu y - x^2 \end{aligned} \quad (5)$$

Führen Sie zu jedem System folgende Aufgaben durch:

- Berechnen Sie den Fixpunkt des Systems.
- Bestimmen Sie den Übergangspunkt  $\mu_0$  zwischen stabilem und instabilem Regime.
- Skizzieren Sie das Bifurkationsdiagramm, welches die stabilen (liniert) und instabilen (gestrichelt) Fixpunkte von  $x$  in Abhängigkeit vom Bifurkationsparameter  $\mu$  darstellt. Verwenden Sie bei (4) Projektionen auf die  $x - \mu$  bzw.  $y - \mu$  Ebenen.
- Benennen Sie anhand der Graphen die Bifurkationstypen.

### **Aufgabe 39 (10 Punkte):** *Dynamisches System*

Man betrachte die folgenden Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned} \dot{q} &= p \\ \dot{p} &= \frac{1}{2}(1 - q^2) \end{aligned}$$

- Ist das System Hamiltonisch? Falls ja, stellen Sie die Hamiltonfunktion auf.
- Untersuchen Sie die kritischen Punkte.
- Skizzieren Sie das Phasenportrait typischer Lösungen zu fester Energie.

11. Übung TPI WS08/09

**Aufgabe 40 (10 Punkte):** *Das FitzHugh-Nagumo-System*

**Bonus**

Das im Jahre 1961 vorgestellte FitzHugh-Nagumo Modell ist eine sehr einfache Form der Modellierung neuronaler Pulsübertragung. Hierbei dienten historisch die langen Nervenzellen von Riesentintenfischen (Axone) als Referenzsystem. Durch diese relativ einfachen Gleichungen lassen sich interdisziplinäre Verhaltensweisen untersuchen, im Speziellen erregbares und oszillatorisches Verhalten. Durch räumliche Kopplung vieler Elemente mit dieser Dynamik (z.B. durch Diffusion oder neuronale Kopplung) können Phänomene wie raumzeitliches Chaos oder Strukturbildung auftreten.

$$\begin{aligned}\dot{u} &= u - u^3 - v + p \\ \dot{v} &= \frac{1}{\epsilon}(u - a - bv)\end{aligned}$$

1. **Isoklinen** sind hier Kurven gleicher Lösungen einer Komponente des Gleichungssystems (z.B.  $\dot{u} = a$ ). Die **Nullkline** ist die Kurve der Nulllösungen  $\dot{u} = 0$ . Berechnen Sie die Nullklinen  $v(u)$  für die Gleichungen von  $u$  und  $v$ . Zeichnen Sie die Nullklinen schematisch in den zweidimensionalen Phasenraum, welcher bei diesem System durch  $(u, v)$  aufgespannt wird. Interpretieren Sie den Schnittpunkt beider Kurven.
2. Berechnen Sie die Fixpunkte und stellen Sie die Stabilitätsbedingungen auf.  
Verwenden Sie für die Analyse  $b = 1$  und  $\epsilon = 1$   
**Numerisch: Dynamik bei Störungen**
3. Plotten Sie die Nullklinen im  $(u, v)$ -Phasenraum.
4. Stellen Sie die Trajektorie (zeitliche Entwicklung) des Systems dar falls es eine anfängliche Störung gibt. Dabei kann eine Störung als Anfangswert ausserhalb des Fixpunktes angenommen werden.

**Aufgabe 41 (10 Punkte):** *Rössler Modell*

**Bonus**

Gegeben sei das Rössler Modell:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y - z \\ \dot{y} &= x + ay \\ \dot{z} &= b + xz - cz\end{aligned}$$

1. Stellen Sie durch numerische Lösung (Integration) die dynamischen Variablen  $x, y, z$  gegen die Zeit  $t$  dar. Benutzen Sie hierbei  $a = b = 0.2$  sowie  $c = 5.7$  und eine genügend lange Zeitspanne.
2. Stellen Sie graphisch die Projektion der Bahn in der  $(x, y)$ -Ebene, als auch die Trajektorie im Phasenraum mit  $(x, \dot{x})$  dar.
3. Erzeugen Sie ein  $(x, y, z)$ -3D-Bild der Bahn.