

2. Übungsblatt – Statistische Physik II

Abgabe: Do. 06.11.2008 vor der Übung

Aufgabe 4 (20 Punkte): *Details zur Thermokonvektion*

1. Leiten Sie die in der Vorlesung bei der linearen Stabilitätsanalyse des Wärmeleitungsregimes verwendeten Gleichungen

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu \vec{\nabla}^2\right) \vec{\nabla}^2(\delta u_z) = -\alpha g \left[\frac{\partial^2(\delta T)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\delta T)}{\partial y^2} \right]$$

$$\frac{\partial(\delta T)}{\partial t} = \chi \vec{\nabla}^2(\delta T) + \beta \delta u_z$$

für die Abweichungen δu_z und δT von der Wärmeleitungslösung $\vec{u} = 0$ (ruhende Flüssigkeit) und (lineares Temperaturprofil) ab.

Hinweis: Eliminieren Sie den Druck in der Gleichung für $\delta \vec{u}$ unter Verwendung der Relation

$$\text{rot rot } \delta \vec{u} = -\vec{\nabla}^2 \delta \vec{u}.$$

Warum ist diese Relation erfüllt?

2. Bestimmen Sie aus der charakteristischen Gleichung für die Fourier-Amplituden der Abweichungen unter Ergänzung der in der Vorlesung weggelassenen Zwischenschritte die Stabilitätsgrenze für die Rayleigh-Zahl in Abhängigkeit von der Wellenzahl der Störung $a = k_{\perp} H / (n\pi)$.

Aufgabe 5 (20 Punkte): *Lineare Stabilitätsanalyse des Lorenz-Systems*

1. Bestimmen Sie die Fixpunkte des Lorenz-Systems

$$\frac{du(t)}{dt} = -\sigma u(t) + \sigma v(t)$$

$$\frac{dv(t)}{dt} = -v(t) + ru(t) - u(t)w(t)$$

$$\frac{dw(t)}{dt} = -bw(t) + u(t)v(t).$$

2. Führen Sie eine lineare Stabilitätsanalyse der Fixpunkte in Abhängigkeit vom Parameter $r = Ra/Ra_{cr}$ durch.
3. Beweisen Sie mit der in der Vorlesung erläuterten Methode die Begrenztheit des seltsamen Attraktors im Phasenraum.