

Projekte zur Statistischen Physik II

Durchführung

Die Projekte beinhalten Aufgaben zur Vertiefung der Statistischen Physik II. Sie sind so konzipiert, dass die Bearbeitung mit der angegebenen Literatur und dem Wissen aus der Vorlesung möglich ist. Zur vollständigen Bearbeitung gehören folgende Punkte:

1. Vorbesprechungen zur Erörterung eines Zwischenstands
2. Präsentation der Lösung in einem 15 minütigen Kurzvortrag im Tutorium. Wichtig ist hierbei in erster Linie die verständliche Darstellung. Beschränken Sie sich deshalb auf die zum Verständnis wesentlichen Punkte.
3. Abgabe einer schriftlichen Ausarbeitung mit vollständiger Dokumentation des Lösungswegs. Auch hier steht die Verständlichkeit und übersichtliche Darstellung im Vordergrund. Der Umfang der Ausarbeitung soll fünf bis zehn Seiten umfassen.

Die Bewertung des Projekts erfolgt in drei Schritten. Es werden dabei jeweils die oben genannten Punkte im Umfang von je einem Übungszettel gewichtet. Der zeitliche Ablauf sieht wie folgt aus:

- Ausgabe und Verteilung der Aufgabenstellungen: 11. Dezember 2008
- erste Vorbesprechung: 15. bis 17. Dezember 2008
- zweite Vorbesprechung: 8. oder 9. Januar 2009
- Projektpräsentation: 22. Januar 2009
- Abgabe der schriftlichen Ausarbeitung: 2. Februar 2009

Projekt 1 (90 Punkte): Komplexe Ginzburg-Landau-Gleichung (analytisch)

Die Komplexe Ginzburg-Landau-Gleichung (CGLE) beschreibt das universelle Verhalten eines oszillierenden Reaktions-Diffusions-systems (RDS) in der Umgebung einer superkritischen Hopf-Bifurkation (HB). Es ist eine Gleichung für die komplexe Amplitude der abzweigenden Oszillation, die durch Störungsentwicklung nach dem Abstand vom Bifurkationspunkt abgeleitet wird. In vielen Fällen zeigt sich durch Vergleich mit numerischen Simulationen, dass der Gültigkeitsbereich der CGLE nicht auf die unmittelbare Umgebung der HB beschränkt ist.

Im Rahmen des Projekts soll die Gleichung für ein n -komponentiges RDS abgeleitet werden.

Aufgabe

1. Vollziehen Sie die von Kuramoto skizzierte Herleitung ([1], Kap. 2) im Detail nach und verifizieren Sie dabei insbesondere die Ausdrücke (2.2.5b), (2.2.20) und (2.4.11).
2. Reduzieren Sie die Gleichungen

$$\begin{aligned}\frac{\partial X}{\partial t} &= A - (B + 1)X + X^2 Y + D_X \nabla^2 X \\ \frac{\partial Y}{\partial t} &= BX - X^2 Y + D_Y \nabla^2 Y,\end{aligned}$$

(Brüsselator) in der Nähe der HB des homogenen stationären Zustands bei $B_{HB} = 1 + A^2$ auf die CGLE, indem Sie die eingehenden Parameter explizit berechnen ([1], Anhang B).

3. Überprüfen Sie anhand des Benjamin-Feir-Kriteriums, ob es einen Parameterbereich mit Phasenturbulenz gibt.

Literaturvorschläge:

- [1] Yoshiki Kuramoto: *Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence*, Springer (1984); Dover (2003).
- [2] Igor S. Aronson, Lorenz Kramer: *The world of the CGLE*, Rev. Mod. Phys. 74, 99 (2002).

Projekt 2 (90 Punkte): Komplexe Ginzburg-Landau-Gleichung (numerisch)

Die Komplexe Ginzburg-Landau-Gleichung (CGLE) beschreibt das universelle Verhalten eines oszillierenden Reaktions-Diffusions-systems (RDS) in der Umgebung einer superkritischen Hopf-Bifurkation (HB). Es ist eine Gleichung für die komplexe Amplitude der abzweigenden Oszillation, die durch Störungsentwicklung nach dem Abstand vom Bifurkationspunkt abgeleitet wird. In vielen Fällen zeigt sich durch Vergleich mit numerischen Simulationen, dass der Gültigkeitsbereich der CGLE nicht auf die unmittelbare Umgebung der HB beschränkt ist.

Im Rahmen des Projekts soll die CGLE numerisch implementiert und in bestimmten Parameterbereiche numerisch gelöst werden.

Achtung: Programmierkenntnisse (MATHEMATICA, C, PYTHON o. ä.) sind erforderlich!

Aufgabe

1. Implementieren Sie die CGLE als Beispiel einer partiellen Differenzialgleichung numerisch.
2. Recherchieren Sie numerische Randbedingungen wie Initialisierung, Parameterbereiche u.ä.
3. Untersuchen Sie durch geeignete Wahl der Parameter interessante Bereiche wie z.B. die Eckhaus-Instabilität, das Benjamin-Feir-Kriterium.
4. Zeigen Sie, dass auswärts- und inwärtslaufende Spirallösungen existieren.

Literaturvorschläge:

- [1] Yoshiki Kuramoto: *Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence*, Springer (1984); Dover (2003).
- [2] Igor S. Aronson, Lorenz Kramer: *The world of the CGLE*, Rev. Mod. Phys. 74, 99 (2002).

Projekt 3 (90 Punkte): S-Theorem bei der weichen Anfachung selbsterregter Schwingungen

Am Beispiel der Brown'schen Bewegung nichtlinearer Oszillatoren soll gezeigt werden, dass die weiche Anfachung selbsterregter Schwingungen im Zuge einer superkritischen Hopf-Bifurkation mit einer Abnahme der Shannon-Entropie einhergeht, vorausgesetzt, es werden Zustände gleicher Energie verglichen (S-Theorem nach Klimontovich).

Aufgabe

1. Ausgangspunkt sind die Langevin-Gleichungen für einen dissipativen nichtlinearen Oszillator

$$\frac{dq^2}{dt^2} + \gamma \left(q, \frac{dq}{dt} \right) \frac{dq}{dt} + q = \sqrt{D} \xi(t)$$

unter dem Einfluss von Gauß'schem weißen Rauschen entsprechend

$$\langle \xi(t) \rangle = 0, \quad \langle \xi(t) \xi(t - \tau) \rangle = \delta(\tau).$$

Für den Reibungskoeffizienten gelte der Einfachheit halber

$$\gamma(H) = \frac{1}{2} [(\gamma_0 - \delta) + 2uH]$$

mit $\gamma_0, \delta, u > 0$, $H = \frac{1}{2} (q^2 + p^2)$ und $p = \frac{dq}{dt}$ (Poincaré-Oszillator).

2. Leiten Sie die Fokker-Planck-Gleichung für die Energie der Schwingungen H ab und zeigen Sie, dass deren stationäre Lösung

$$P^0(H; \delta) = \frac{1}{Z} \exp \left\{ -\frac{1}{D} [(\gamma_0 - \delta)H + uH^2] \right\}$$

ist.

3. Diskutieren Sie die Abhängigkeit der Informationsentropie dieser Verteilung

$$S(\delta) = - \int_0^\infty dH P^0(H; \delta) \ln P^0(H; \delta)$$

von der Anregungsstärke δ . Zeigen Sie, dass

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \delta} \right)_D > 0, \quad \left(\frac{\partial S}{\partial \delta} \right)_{\langle H \rangle} < 0$$

und interpretieren Sie die Ergebnisse.

Literaturvorschläge:

- Jurij L. Klimontovich: *Statistical Physics*. Harwood Academic Publishers, 1986: Kapitel 11 und 12. (siehe Semesterapparat)