

6. Übungsblatt – Thermodynamik und Statistik WS08/09

Abgabe: Di. 25.11.2008 vor der Vorlesung im EW 203

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet.
Abgabe in Dreiergruppen! Bitte immer Namen und Matrikelnummer angeben.

Aufgabe 13 (10 Punkte): STATISTIK UND KLASSISCHES IDEALES GAS

Als Modellsystem für ein klassisches ideales Gas betrachtet man punktförmige Teilchen der Masse m im Volumen V bei der Temperatur T und dem chem. Potential μ . Die großkanonische Zustandssumme wird für ein klassisches ideales Gas wie folgt berechnet:

$$(1) \quad Z_G(T, V, \mu) = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{V^N}{h^{3N} N!} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta(\varepsilon_N - \mu N)} d^3\mathbf{p}_1 \dots d^3\mathbf{p}_N.$$

Dabei gilt $\varepsilon_N = \sum_{j=1}^N \frac{\mathbf{p}_j^2}{2m}$ und $\beta = 1/(k_B T)$.

- (a) Wiederholen Sie aus der VL die Ableitung von Gleichung (??) ausgehend von der Summation über alle möglichen Zustände $Z_G = \sum_{n, N_n} \exp[-\beta \{\varepsilon_n(N_n) - \mu N_n\}]$. Wandeln Sie dazu die Summe in eine Integration um und gehen Sie von der Formulierung bezüglich der Besetzungszahlen n zu den Impulsen \mathbf{p} über.
- (b) Diskutieren Sie den Unterschied zur quantenmechanischen großkanonischen Zustandssumme (Vorlesung). Erläutern Sie den Faktor $N!$.
- (c) Berechnen Sie die großkanonische Zustandssumme, als Funktion der thermischen Wellenlänge ($\lambda = \sqrt{2\pi\hbar^2/mk_B T}$).
- (d) Berechnen Sie die innere Energie \bar{E} , die mittlere Teilchenzahl \bar{N} und den Druck p .
- (e) Was ergibt sich demzufolge als thermische Zustandsgleichung $p(\bar{N}, V, T)$ und was als kalorische Zustandsgleichung $E(\bar{N}, V, T)$.
- (f) Funktioniert diese Rechnung auch falls $\varepsilon_N = \sum_{j=1}^N c \cdot |\mathbf{p}_j|$ gilt?

Aufgabe 14 (10 Punkte): PLANCK'SCHES STRAHLUNGSGESETZ

- (a) Bestimmen Sie ausgehend vom PLANCK'schen Strahlungsgesetz,

$$u(\omega, T) d\omega = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \frac{\hbar\omega}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} d\omega,$$

das spektrale Maximum eines schwarzen Körpers. Lösen Sie die auftretende transzendente Gleichung numerisch (z.B. mit *Mathematica*®).

- (b) Der Energiefluss der Sonne auf die Erde bei senkrechtem Einfall (Solarkonstante) beträgt 1360 W/m^2 , der Abstand Sonne-Erde $1,5 \times 10^{11} \text{ m}$ und der Sonnenradius $7 \times 10^8 \text{ m}$. Berechnen Sie mit Hilfe der Solarkonstante die totale Strahlungsleistung der Sonne, sowie die Oberflächentemperatur der Sonne unter der Annahme, dass diese wie ein schwarzer Körper strahlt.

(Hinweis: $\int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^4}{15}$)