

**9. Übungsblatt – Thermodynamik und Statistik WS08/09**

**Abgabe: Di. 06.01.2009**

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet.  
**Abgabe in Dreiergruppen! Bitte immer Namen und Matrikelnummer angeben.**

**Aufgabe 19 (7 Punkte): Bose-Einstein-Kondensation – Wiederholung der Vorlesung**

- (a) Diskutieren Sie mögliche Werte des chemischen Potentials für die Fermi-Dirac und die Bose-Einstein Statistik  $f^{F/B}(\varepsilon_i, T, \mu)$ . Plotten Sie die Verteilungen für verschiedene Temperaturen, dabei sei  $\mu = \text{fest}$ . Wie verändert sich die mittlere Teilchenzahl?
- (b) Betrachten Sie ein dreidimensionales Gas von Bosonen der Dichte  $n$ . Die mittlere Teilchenzahl  $\bar{N}$  läßt sich berechnen durch Summation über alle Einzelbesetzungswahrscheinlichkeiten  $f^B(\mathbf{k})$

$$\bar{N} = \sum_{\mathbf{k}} f^B(\mathbf{k})$$

$\mathbf{k}$  ist der Wellenvektor der Teilchen. Es gilt die Dispersionsrelation  $\varepsilon = \frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m}$ . Zeigen Sie, dass sich diese Summe in ein Integral der Form,

$$\frac{\bar{N}}{V} = \int_0^\infty f_-(\varepsilon) \rho(\varepsilon) d\varepsilon$$

überführen läßt mit der dreidimensionalen Zustandsdichte,  $\rho(\varepsilon) = \frac{1}{4\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \sqrt{\varepsilon}$ . (Die mittlere Teilchenzahl  $\bar{N}$  ist fest.)

- (c) Bestimmen Sie mit Hilfe des Ergebnisses aus (a) die minimal mögliche Temperatur (bei  $\mu = 0$ ). Diese ist die kritische Temperatur der Bose-Einstein Kondensation  $T_c$ .  
 (Hinweis:  $\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{e^x - 1} dx \approx 2.612$ )
- (d) Berechnen Sie damit für  $T < T_c$  die mittlere Teilchenzahl  $N'$ . Ergeben sich Widersprüche für ein abgeschlossenes System und was bedeutet das?
- (e) Argumentieren Sie, warum bei sehr kleinen Temperaturen beim Übergang von der Summe zum Integral ein Fehler in der Rechnung aus (b) entsteht.
- (f) Machen Sie den Ansatz  $\bar{N}/V = \rho_0 + N'/V$ , mit  $\rho_0$  als der Dichte des Bose-Einstein-Kondensats. Erklären Sie, warum dieser Ansatz den gemachten Fehler korrigiert. Berechnen Sie den Anteil der kondensierten Materie  $\frac{V\rho_0}{\bar{N}}$ .

**Aufgabe 20 (13 Punkte):** *Das ideale Fermi-Gas – Elektronen im Metall*

Das ideale Fermi-Gas kann als Quantenanalogue zum klassischen idealen Gas gesehen werden: Es ist ein System aus fermionischen Partikeln zwischen denen keine (oder vernachlässigbare) Wechselwirkung besteht. Elektronen in einem Metall erscheinen hier zunächst als schlechtes Beispiel (für so ein nichtwechselwirkendes Gas). Es kann jedoch in der Festkörpertheorie gezeigt werden, dass im Mittel die positiven Hintergrundladungen der Ionen die negativen Ladungen der Elektronen neutralisieren und somit doch ein gutes Modell vorliegt.

- (a) Bestimmen Sie zunächst über die mittlere Anzahl der Elektronen  $\bar{N}$  das chemische Potential  $\mu(T = 0K) = \varepsilon_F$  und die innere Energie  $E$  bei  $T = 0$  K.
- (b) Zeigen Sie unter Verwendung folgender Entwicklung für eine beliebige Funktion  $\phi$  unter Annahme niedriger Temperaturen

$$\int_0^\infty d\varepsilon \phi(\varepsilon) f^F(\varepsilon, T) = \int_0^\mu d\varepsilon \phi(\varepsilon) + \frac{\pi^2}{6} (k_B T)^2 \phi'(\varepsilon)|_{\varepsilon=\mu} + \frac{7\pi^4}{360} (k_B T)^4 \phi'''(\varepsilon)|_{\varepsilon=\mu} + \dots,$$

dass für die mittlere Teilchenzahl gilt:

$$\bar{N} = \frac{V}{3\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar}\right)^{3/2} \mu^{3/2} \left[1 + \frac{\pi^2}{8} \left(\frac{k_B T}{\mu}\right)^2 + \dots\right]$$

Achtung:  $\mu$  ist hier das temperaturabhängige Fermienergie  $\mu(T)$ , nicht  $\varepsilon_F$ .

- (c) In zweiter Ordnung von  $T$  ist es ausreichend  $\mu$  durch  $\varepsilon_F$  zu ersetzen. Stellen Sie damit  $\mu(T)$  dar. Was gilt im Grenzfall  $T \rightarrow 0$ ?
- (d) Zeigen Sie mit Hilfe der gleichen Entwicklung, dass

$$E = \frac{V}{5\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar}\right)^{3/2} \mu^{5/2} \left[1 + \frac{5\pi^2}{8} \left(\frac{k_B T}{\mu}\right)^2 + \dots\right]$$

für die innere Energie gilt.

- (e) Berechnen Sie nun die Wärmekapazität unter Verwendung der Ergebnisse von (c) und (d). Was fällt im Vergleich zum klassischen Fall und zum Phononensystem auf?