Quantum Computation:
Zusammenfassung der 10. Vorlesung (16.01.09)

2.21 *Fehlerabschätzung im Fall* $2^N\phi \notin \mathbf{Z}$

Falls $2^N\phi = b + 2^N\delta$, $b \in \mathbf{Z}$, $\delta \in (0, \frac{1}{2^N})$, d.h. $\phi = 0, b_1 b_1 \dots b_N \delta_1\delta_2\delta_3 \dots$, dann ist der Zustand Ψ_N vom letzten Abschnitt

$$\Psi_N = \frac{1}{\sqrt{2^N}} \sum_{k=0}^{2^N-1} e^{\frac{2\pi i}{2^N} k(b+2^N\delta)} |k)$$

nicht die Fouriertransformierte von $|b)$ und die Anwendung von $\mathbf{F_N}^+$ führt auf

$$\check{\Psi}_N = \sum_{k=0}^{2^N-1} a_k |k),$$

wobei i. Allg. $a_k \neq 0$ für $k \neq b$. Die Messung am ersten Register liefert also nicht notwendig b. Für die Entwicklungskoeffizienten a_k gilt

$$\begin{aligned}
a_k &= (k|\check{\Psi}_N) = (\hat{k}|\Psi_N) \\
&= \frac{1}{2^N} \sum_{l=0}^{2^N-1} e^{-\frac{2\pi i}{2^N} lk} \sum_{m=0}^{2^N-1} e^{\frac{2\pi i}{2^N} m(b+2^N\delta)} (l|m) \\
&= \frac{1}{2^N} \sum_{l=0}^{2^N-1} e^{\frac{2\pi i}{2^N} l(b-k+2^N\delta)} = \frac{1}{2^N} \sum_{l=0}^{2^N-1} x^l
\end{aligned}$$

wobei $x = e^{\frac{2\pi i}{2^N}(b-k+2^N\delta)}$. Die Summe der geometrischen Reihe ist $\frac{1-x^{2^N}}{1-x}$, also ist

$$a_k = \frac{1}{2^N} \frac{1 - e^{2\pi i(b-k+2^N\delta)}}{1 - e^{\frac{2\pi i}{2^N}(b-k+2^N\delta)}} = \frac{1}{2^N} \frac{1 - e^{2^{N+1}\pi i\delta}}{1 - e^{2\pi i(\frac{b-k}{2^N}+\delta)}}.$$

Für die Wahrscheinlichkeit, bei Messung am ersten Register das Ergebnis k zu erhalten, ergibt sich

$$\begin{aligned}
p_k(b,\delta) = |a_k|^2 &= \frac{1}{2^{2N}} \frac{(1-\cos(2^{N+1}\pi\delta))^2 + (\sin(2^{N+1}\pi\delta))^2}{(1-\cos(2\pi(\frac{b-k}{2^N}+\delta))^2 + (\sin(2\pi(\frac{b-k}{2^N}+\delta))^2} \\
&= \frac{1}{2^{2N}} \frac{(1-\cos(2^{N+1}\pi\delta))}{(1-\cos(2\pi(\frac{b-k}{2^N}+\delta))}.
\end{aligned}$$

Damit ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Messwert am ersten Register um $d := k - b$ vom richtgen Wert b abweicht

$$q_d(\delta) = p_{b+d}(b,\delta) = \frac{1}{2^{2N}} \frac{(1-\cos(2^{N+1}\pi\delta))}{(1-\cos(2\pi(\delta - \frac{d}{2^N}))}.$$

Dies ist von b unabhängig. (Bemerke $2^N\phi = b_1 b_2 \cdots_N, \delta_1\delta_2\ldots$ aber $q_d(0) = 0$ für $d \neq 0$.) Wir können damit die Wahrscheinlichkeit dafür abschätzen, dass die Abweichung $|d|$ des Messwertes größer als ein vorgegebenes $\epsilon \geq 1$ ist. Diese Wahrscheinlichkeit ist

$$q_{|d|>\epsilon}(\delta) = \sum_{d=-b}^{-(\epsilon+1)} q_d(\delta) + \sum_{d=\epsilon+1}^{2^N-(b+1)} q_d(\delta)$$

Alternativ kann man wegen $q_{|d|>\epsilon}(\delta) + q_{|d|\leq\epsilon}(\delta) = 1$ auch

$$q_{|d|\leq\epsilon}(\delta) = \sum_{d=-\epsilon}^{\epsilon} q_d(\delta)$$

nach unten abschätzen. Dabei sollte für $\epsilon \geq 1$ beachtet werden, dass die Summationsgrenzen nur für $\epsilon \leq b \leq 2^N - (\epsilon+1)$ und $\epsilon \geq 1$ gelten und die Fälle $0 \leq b < \epsilon$ und $2^N - (\epsilon + 1 < b \leq 2^N - 1$ gesondert behandelt werden müssen. Wir werden die Summen durch Integrale abschätzen. Um die Integrale leichter berechnen zu können, schätzen wir den Integranden durch rationale Funktionen ab.

Im Intervall $[0, 2\pi]$ haben das Polynom 4.Ordnung

$$f(x) = \alpha x^2(x-2\pi)^2 \quad \text{und} \quad 1 - \cos x$$

die Nullstellen und Extremata an den gleichen Stellen. Durch geeignete Verfügung über α lässt $1 - \cos x$ sowohl nach oben als auch nach unten abschätzen. Es gilt

$$f'(x) = 4\alpha(x^3 - 3\pi x^2 + 2\pi^2 x), \qquad f''(x) = 4\alpha(3x^2 - 6\pi x + 2\pi^2),$$

sowie

$$f(\pi) = \alpha\pi^4, \quad f''(0) = f''(2\pi) = 8\alpha\pi^2, \quad f''(\pi) = -4\alpha\pi^2$$

Für die Abschätzung nach oben muss gelten $f(\pi) \geq 2$, also $\alpha \geq \frac{2}{\pi^4}$, und ferner $f''(0) = f''(2\pi) \geq 1$, also $\alpha \geq \frac{1}{8\pi^2}$ sowie $f''(\pi) \geq -1$, also $\alpha \leq \frac{1}{4\pi^2}$, damit die Krümmungsradien der majorisierenden Funktion die der majorisierten Funktion an den Minima übertreffen, und der Krümmungsdius der majorisierten Funktion den der majorisierenden am Macimum übertrifft. Wegen $\frac{1}{8\pi^2} \leq \frac{2}{\pi^4} \leq \frac{1}{4\pi^2}$ scheint $\alpha = \frac{2}{\pi^4}$ geeignet zu sein. Tatsächlich ist mit diesem α auch $f(\frac{\pi}{4}) \geq 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$. Damit ist, weil f nur einen Wendepunkt in $[0, \pi]$ hat,

$$1 - \cos x \leq \frac{2}{\pi^4} x^2 (x - 2\pi)^2.$$

Die für die Abschätzung nach unten entsprechenden Bedingungen $\alpha \leq \frac{2}{\pi^4}$, $\alpha \leq \frac{1}{8\pi^2}$ und $\alpha \geq \frac{1}{4\pi^2}$ lassen sich nicht erfüllen. Die letzte dieser Bedingungen ist jedoch nur dann notwendig. wenn $f(\pi) = 2$ ist. Wählen wir $\alpha = \frac{1}{8\pi^2}$, dann majorisiert $1 - \cos x$ die Funktion $f(x)$ am den Enden des Intervalls und überdies gilt $f(\pi) = \frac{\pi^2}{8}$ und $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{9\pi^2}{128} < 1$ sowie $f(\frac{\pi}{4}) = \frac{49\pi^2}{256} < 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$. Damit gilt

$$1 - \cos x \geq \frac{1}{8\pi^2} x^2 (x - 2\pi)^2.$$

Nun können wir die Integranden abschätzen. Es ist

$$\frac{1}{2^{2N}} \frac{\frac{2}{\pi^4}(2^{N+1}\pi\delta)^2(2^{N+1}\pi\delta - 2\pi)^2}{\frac{1}{8\pi^2}(2\pi(\delta - \frac{d}{2^N}))^2(2\pi(\delta - \frac{d}{2^N}) - 2\pi)^2} =$$

$$\frac{1}{2^{2N}} \frac{16(2^N\delta)^2(2^N\delta - 1)^2}{\pi^2(\delta - \frac{d}{2^N})^2((\delta - \frac{d}{2^N}) - 1)^2} \geq q_d(\delta) \geq \frac{1}{2^{2N}} \frac{\pi^2(2^N\delta)^2(2^N\delta - 1)^2}{16(\delta - \frac{d}{2^N})^2((\delta - \frac{d}{2^N}) - 1)^2}.$$

Um den Einfluss von $\delta \in (0, \frac{1}{2^N})$ zu verdeutlichen, betrachten wir $q_0(\delta)$

$$\frac{16(2^N\delta - 1)^2}{\pi^2(\delta - 1)^2} \geq q_0(\delta) \geq \frac{\pi^2(2^N\delta - 1)^2}{16(\delta - 1)^2}.$$

Während für $q_0(\delta)$ an der unteren Grenze von $\delta \in (0, \frac{1}{2^N})$ noch größer als $\frac{\pi^2}{16}$ ist strebt diese Wahrscheinlichkeit gegen 0, wenn sich δ der oberen Grenze nähert.

Wir nehmen nun noch an, dass $|\delta - \frac{d}{2^N}| \leq \frac{1+\epsilon}{2^N} \ll 1$ ist, so dass

$$q_d(\delta) \geq \frac{\pi^2(2^N\delta)^2(2^N\delta - 1)^2}{2^{2(N+2)}} \frac{1}{(\delta - \frac{d}{2^N})^2}$$

noch eine vertretbare Abschätzung ist. Damit wird

$$q_{|d|\leq\epsilon}(\delta) \geq \frac{\pi^2(2^N\delta)^2(2^N\delta-1)^2}{2^{2(N+2)}} \sum_{d=-\epsilon}^{\epsilon} \frac{1}{(\delta - \frac{d}{2^N})^2}.$$

Mit

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{(\delta-\frac{x}{2^N})^2} = \frac{1}{2^{N-1}}\frac{1}{(\delta-\frac{x}{2^N})^3}\begin{cases} <0 & \text{falls} \quad \frac{x}{2^N} > \delta, \quad \text{also} \quad x > 1 \\ >0 & \text{falls} \quad \frac{x}{2^N} \leq 0, \quad \text{also} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

ist also

$$\sum_{d=-\epsilon}^{0} \frac{1}{(\delta-\frac{d}{2^N})^2} \geq \int_{-(\epsilon+1)}^{0} \frac{1}{(\delta-\frac{d}{2^N})^2}\mathrm{d}d$$

und

$$\sum_{d=1}^{\epsilon} \frac{1}{(\delta-\frac{d}{2^N})^2} \geq \int_{1}^{\epsilon+1} \frac{1}{(\delta-\frac{d}{2^N})^2}\mathrm{d}d,$$

weil die Summen Obersummen der Integrale sind. Aus

$$\int_{-(\epsilon+1)}^{0} \frac{1}{(\delta-\frac{d}{2^N})^2}\mathrm{d}d = 2^{2N} \left.\frac{1}{(2^N\delta-d)}\right|_{-(\epsilon+1)}^{0} = 2^{2N}\left(\frac{1}{2^N\delta} - \frac{1}{2^N\delta+(\epsilon+1)}\right)$$

und

$$\int_{1}^{\epsilon+1} \frac{1}{(\delta-\frac{d}{2^N})^2}\mathrm{d}d = 2^{2N}\left(\frac{1}{2^N\delta-(\epsilon+1)} - \frac{1}{2^N\delta-1}\right)$$

folgt

$$\sum_{d=-\epsilon}^{\epsilon} \frac{1}{(\delta-\frac{d}{2^N})^2} \geq 2^{2N}\left(\frac{1}{2^N\delta(1-2^N\delta)} + \frac{2(\epsilon+1)}{2^{2N}\delta^2-(\epsilon+1)^2}\right).$$

Scließlich ist

$$\begin{aligned} q_{|d|\leq\epsilon}(\delta) &\geq \frac{\pi^2(2^N\delta)^2(2^N\delta-1)^2}{2^4}\left(\frac{1}{2^N\delta(1-2^N\delta)} + \frac{2(\epsilon+1)}{2^{2N}\delta^2-(\epsilon+1)^2}\right) \\ &= \frac{\pi^2(2^N\delta)^2(2^N\delta-1)^2}{2^4}\left(\frac{1}{2^N\delta(1-2^N\delta)} - \frac{2(\epsilon+1)}{(\epsilon+1)^2-2^{2N}\delta^2}\right) \end{aligned}$$

Für die Praxis ist diese Abschätzung, die noch um die Fälle $\epsilon \leq b \leq 2^N - (\epsilon + 1)$ und $\epsilon \geq 1$ erweitert werden müsste, von großer Bedeutung, weil die Frage, wie groß man N wählen muss, wenn die Messung am ersten Register die ersten L Stellen der Phase mit großer Wahrscheinlichkeit richtig wiedergeben soll, relevant ist. Dazu betrachte man

$$d = k - b = (k_1 - b_1)2^{N-1} + \ddots + (k_K - b_K)2^{N-K} + \Theta,$$

$|\Theta| < 2^{N-K}$. Die ersten K Stellen von k und b stimmen überein, wenn $|d| \leq 2^{N-K-1} = 2^{L-1} = \epsilon$ ist. Die Wahrscheilichkeit dafür ist, wenn das erste Register aus N Qubits besteht,

$$\begin{aligned} q_{|d|\leq\epsilon}(\delta) &\geq \frac{\pi^2(2^N\delta)^2(2^N\delta - 1)^2}{2^4}\left(\frac{1}{2^N\delta(1-2^N\delta)} - \frac{2(2^{L-1}+1)}{(2^{L-1}+1)^2 - 2^{2N}\delta^2}\right) \\ &\approx \frac{\pi^2(2^N\delta)^2(2^N\delta - 1)^2}{2^4}\left(\frac{1}{2^N\delta(1-2^N\delta)} - \frac{2}{(2^{N-K-1}+1)}\right), \end{aligned}$$

wenn im Nenner $2^{2N}\delta^2 < 1$ gegen $(2^{N-K-1}+1)^2$ vernachlässigt werden kann. Für große N nähert sich die untere Schranke dem von K unabhängigen Wert $\frac{\pi^2}{16}2^N\delta(1-2^N\delta)$, der für $2^N\delta = \frac{1}{2}$ sein Maximum $\frac{\pi^2}{64}$ annimmt. Mit Forderung nach der größere Anzahl von "richtigen" Stiellen K nimmt die untere Schranke der Wahrscheinlichkeit ab.

Die ist nur eine grobe Abschätzung, die jedoch zeigt, wie empfindlich die Wahrscheinlichkeit $q_{|d|\leq\epsilon}(\delta)$ von δ abhgängt.