

Quantum Computation: Zusammenfassung der 8. Vorlesung (05.12.08)

2.1.1 Die Quantenfouriertransformation (Fortsetzung)

Die Tensorprodukt Darstellung liefert auch die Implementation der Fouriertransformation, Für $N = 1$ ist

$$|\hat{x}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{2\pi i \frac{x}{2}}|1\rangle) = H|x\rangle.$$

Das Hadamard Gatter implementiert die Fouriertransformation für $N = 1$.

Für $N = 2$ bewirkt

$$\left. \begin{array}{l} |x_1\rangle \text{---} |x_1\rangle \\ |x_2\rangle \text{---} \boxed{H} \text{---} (|0\rangle + e^{2\pi i \frac{x_2}{2}}|1\rangle) \end{array} \right\} = |x_1\rangle \otimes (|0\rangle + e^{2\pi i \frac{x_2}{2}}|1\rangle),$$

denn

$$\begin{aligned} (|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle) \begin{pmatrix} H & \\ & H \end{pmatrix} &= (|0\rangle \otimes (|0\rangle + |1\rangle) |0\rangle \otimes (|0\rangle - |1\rangle) \\ &\quad |1\rangle \otimes (|0\rangle + |1\rangle) |1\rangle \otimes (|0\rangle - |1\rangle)). \end{aligned}$$

Damit ist der erste Faktord der Transformation erzeugt, er steht allerdings an der zweiten Stelle. Dies kann man mit dem *SWAP*-Gatter korrigieren.

$$\left. \begin{array}{l} |x_1\rangle \text{---} \text{---} (|0\rangle + e^{2\pi i \frac{x_2}{2}}|1\rangle) \\ |x_2\rangle \text{---} \boxed{H} \text{---} |x_1\rangle \end{array} \right\} = (|0\rangle + e^{2\pi i \frac{x_2}{2}}|1\rangle) \otimes |x_1\rangle,$$

Anders ausgedrückt liefert diese Schaltung mit

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & 1 & \\ & 1 & 0 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ 1 & -1 & & \\ & & 1 & 1 \\ & & 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & 1 & \\ 1 & -1 & & \\ & & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

die Basistransformation

$$\begin{aligned}
 & (|00\rangle |01\rangle |10\rangle |11\rangle) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & -1 & \\ & & 1 & -1 \\ & & & 1 & -1 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} ((|0\rangle + |1\rangle) \otimes |0\rangle \quad (|0\rangle - |1\rangle) \otimes |0\rangle \\
 & \quad (|0\rangle + |1\rangle) \otimes |1\rangle \quad (|0\rangle - |1\rangle) \otimes |1\rangle).
 \end{aligned}$$

Wir machen nun eine Zwischenüberlegung. Sei $e_n := e^{2\pi i/2^n}$. Mit

$$\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \left(\begin{array}{cc} 1 & \\ & e_n \end{array} \right) \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} = \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \left(\begin{array}{cc} 1 & \\ & e_n \end{array} \right) \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \cong \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & e_n \end{pmatrix}$$

ist

$$\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \left(\begin{array}{cc} 1 & \\ & e_n \end{array} \right) \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} = \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \left(\begin{array}{cc} 1 & \\ & e_n \end{array} \right) \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \cong \begin{pmatrix} \mathbf{1}_2 & & & & \\ & \mathbf{1}_2 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & e_n & \\ & & & & 1 \\ & & & & & e_n \end{pmatrix},$$

so dass

$$\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \left(\begin{array}{cc} 1 & \\ & e_2 \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc} 1 & \\ & e_3 \end{array} \right) \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \cong \begin{pmatrix} \mathbf{1}_2 & & & & \\ & \mathbf{1}_2 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & e^{\frac{\pi i}{4}} & \\ & & & & e^{\frac{\pi i}{2}} \\ & & & & & e^{\frac{3\pi i}{4}} \end{pmatrix}.$$

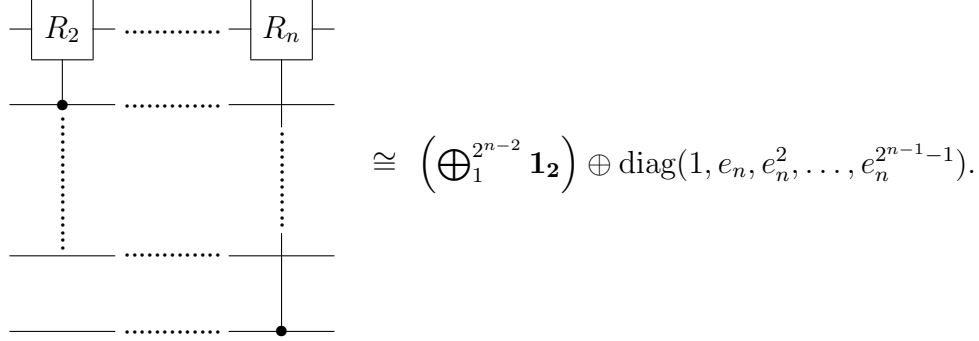
Mit der Abkürzung $R_n := \begin{pmatrix} 1 & \\ & e_n \end{pmatrix}$ machen wir die Induktionsannahme für das n -Qubitgatter

$$\cong \left(\bigoplus_1^{2^{n-2}} \mathbf{1}_2 \right) \oplus \left(\bigoplus_1^{2^{n-2}} \begin{pmatrix} 1 & \\ & e_n \end{pmatrix} \right)$$

Verlängert man das Register um ein Qubit und berücksichtigt die *SWAP*-Gatter, die die Vertauschung der letzten zwei Qubits bewirken, dann ergibt sich für die darstellende Matrix

$$\begin{aligned} & \left(\bigoplus_1^{2^{n-1}} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & 1 & \\ & 1 & 0 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \right) \\ & \left(\left(\bigoplus_1^{2^{n-2}} \mathbf{1}_4 \right) \oplus \left(\bigoplus_1^{2^{n-2}} \begin{pmatrix} \mathbf{1}_2 & & & \\ & e_{n+1} \mathbf{1}_2 & & \end{pmatrix} \right) \right) \left(\bigoplus_n^{2^{n-1}} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & 1 & \\ & 1 & 0 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \left(\bigoplus_1^{2^{n-2}} \mathbf{1}_4 \right) \oplus \left(\bigoplus_1^{2^{n-2}} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & 1 & \\ & 1 & 0 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1}_2 & & & \\ & e_{n+1} \mathbf{1}_2 & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & 1 & \\ & 1 & 0 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \left(\bigoplus_1^{2^{n-1}} \mathbf{1}_2 \right) \oplus \left(\bigoplus_1^{2^{n-1}} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & & & \\ & & & e_{n+1} \end{pmatrix} \right) \\ &= \left(\bigoplus_1^{2^{(n+1)-2}} \mathbf{1}_2 \right) \oplus \left(\bigoplus_1^{2^{(n+1)-2}} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & & & \\ & & & e_{n+1} \end{pmatrix} \right), \end{aligned}$$

was die Induktionsannahme bestätigt. Wir machen nun noch die Induktionsannahme

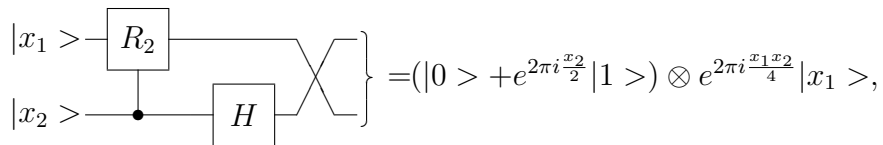


Der Schluss von n auf $n + 1$ vollzieht sich in ähnlicher Weise wie im letzten Induktionsbeweis

$$\begin{aligned}
& \left(\left(\bigoplus_1^{2^{n-2}} \mathbf{1}_2 \right) \oplus \text{diag}(\mathbf{1}_2, e_n \mathbf{1}_2, e_n^2 \mathbf{1}_2, \dots, e_n^{2^{n-1}-1} \mathbf{1}_2) \right) \\
& \quad \left(\left(\bigoplus_1^{2^{n-2}} \mathbf{1}_2 \right) \oplus \left(\bigoplus_1^{2^{n-2}} \begin{pmatrix} 1 & \\ & e_{n+1} \end{pmatrix} \right) \right) \\
&= \left(\bigoplus_1^{2^{n-1}} \mathbf{1}_2 \right) \oplus \text{diag}(1, e_{n+1}, e_n, e_n e_{n+1}, e_n^2, e_n^2 e_{n+1}, \dots, e_n^{2^{n-1}-1}, e_n^{2^{n-1}-1} e_{n+1}) \\
&= \left(\bigoplus_1^{2^{n-1}} \mathbf{1}_2 \right) \oplus \text{diag}(1, e_{n+1}, e_{n+1}^2, e_{n+1}^3, e_{n+1}^4, e_{n+1}^5, \dots, e_{n+1}^{2(2^{n-1}-1)}, e_{n+1}^{2^{n-1}}) \\
&= \left(\bigoplus_1^{2^{(n+1)-2}} \mathbf{1}_2 \right) \oplus \text{diag}(1, e_{n+1}, e_{n+1}^2, e_{n+1}^3, e_{n+1}^4, e_{n+1}^5, \dots, e_{n+1}^{2^n-2}, e_{n+1}^{2^{(n+1)-1}-1}),
\end{aligned}$$

denn es ist $e_n = e^{\frac{2\pi i}{2^n}} = e^{2\frac{2\pi i}{2^{n+1}}} = e_{n+1}^2$. Damit ist auch die zweite Induktionsannahme bestätigt.

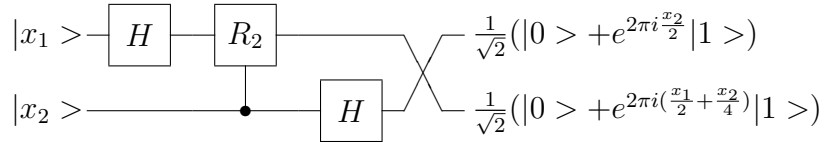
Wir kehren nun zum Fall $N = 2$ zurück. Der folgende Schaltkreis versieht den zweiten Faktor im Falle $x_1 = 1$ und $x_2 = 1$ mit dem Phasenfaktor i .



denn mit $e_2 = i$ ist

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes |0\rangle (|0\rangle - |1\rangle) \otimes |0\rangle \\ & \quad |0\rangle + |1\rangle) \otimes |1\rangle (|0\rangle - |1\rangle) \otimes |1\rangle \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & i \end{pmatrix} \\ & = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes |0\rangle (|0\rangle - |1\rangle) \otimes |0\rangle \\ & \quad |0\rangle + |1\rangle) \otimes |1\rangle (|0\rangle - |1\rangle) \otimes i|1\rangle) \end{aligned}$$

Der Sinn dieses Schrittes zeigt sich im folgenden Schaltbild, das die vollständige Implementation von \mathbf{F}_2 darstellt.

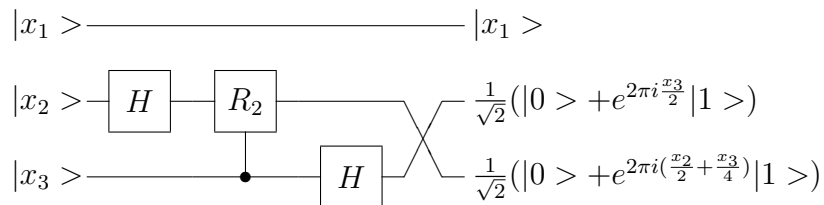


Dies wird mit der Rechnung

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes |0\rangle (|0\rangle - |1\rangle) \otimes |0\rangle \\ & \quad (|0\rangle + |1\rangle) \otimes |1\rangle (|0\rangle - |1\rangle) \otimes i|1\rangle) \begin{pmatrix} \mathbf{1}_2 & \mathbf{1}_2 \\ \mathbf{1}_2 & -\mathbf{1}_2 \end{pmatrix} \\ & = \frac{1}{2}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes (|0\rangle + |1\rangle)(|0\rangle - |1\rangle) \otimes (|0\rangle + i|1\rangle) \\ & \quad (|0\rangle + |1\rangle) \otimes (|0\rangle - |1\rangle)(|0\rangle - |1\rangle) \otimes (|0\rangle - i|1\rangle)) \\ & = (|\hat{0}\hat{0}\rangle \quad |\hat{0}\hat{1}\rangle \quad |\hat{1}\hat{0}\rangle \quad |\hat{1}\hat{1}\rangle) = (|\hat{0}\rangle \quad |\hat{1}\rangle \quad |\hat{2}\rangle \quad |\hat{3}\rangle) \end{aligned}$$

bestätigt.

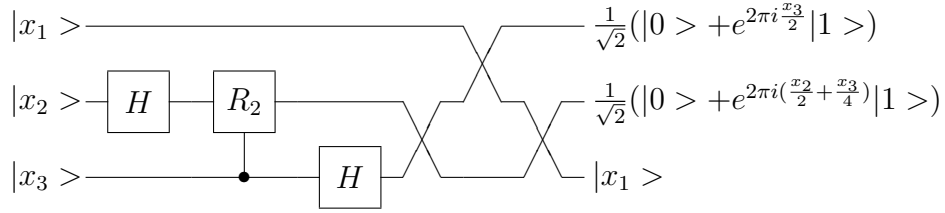
Wir betrachten nun die Implementation von \mathbf{F}_3 . Das Gatter



stellt, wie bei der Implementation von \mathbf{F}_2 , die ersten Faktoren der Tensorprodukt-darstellung an die hintere Stelle. Rechnerisch bewirkt das Gatter

$$\begin{aligned}
 & (|000\rangle |001\rangle |010\rangle |011\rangle |100\rangle |101\rangle |110\rangle |111\rangle)(\mathbf{1}_4 \otimes \mathbf{F}_2) \\
 & = (|0\rangle \otimes |\hat{0}\hat{0}\rangle |0\rangle \otimes |\hat{0}\hat{1}\rangle |0\rangle \otimes |\hat{1}\hat{0}\rangle |0\rangle \otimes |\hat{1}\hat{1}\rangle \\
 & \quad |1\rangle \otimes |\check{0}\check{0}\rangle |1\rangle \otimes |\check{0}\check{1}\rangle |1\rangle \otimes |\check{1}\check{0}\rangle |1\rangle \otimes |\check{1}\check{1}\rangle).
 \end{aligned}$$

Um die Faktoren an die richtige Stelle zu bringen, kann man auch hier *SWAP*-Gatter nachschalten



Verwendet man $\mathbf{1}_4 \otimes \mathbf{F}_2 = \mathbf{F}_2 \oplus \mathbf{F}_2$ dann erzeugen die nachgeschalteten *SWAP*-Gatter die Matrix

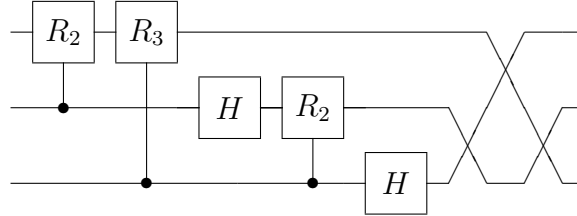
$$\begin{aligned}
 & \left(\begin{array}{cccc} 1 & & & \\ & 0 & 1 & \\ & 1 & 0 & \\ & & & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{cccc} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & 1 \\ & & 1 & 0 \\ & & & & 1 \end{array} \right) (\mathbf{1}_4 \otimes \mathbf{F}_2) \\
 & = \frac{1}{4} \left(\begin{array}{cccc} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ & & & & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & & & & 1 & i & -1 & -i \\ & & & & 1 & -1 & 1 & -1 \\ & & & & 1 & -i & -1 & i \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & \\ & 1 & i & -1 & -i & & & & \\ & & & & & 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 & & & & & \\ & & & & & & 1 & -1 & 1 & -1 \\ & 1 & -i & -1 & i & & & & & \\ & & & & & & & & 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix}$$

(vgl. die analoge Matrix für \mathbf{F}_2) und liefern mithin die Basistransformation

$$\begin{aligned} & (|000\rangle \otimes |001\rangle \otimes |010\rangle \otimes |011\rangle \otimes |100\rangle \otimes |101\rangle \otimes |110\rangle \otimes |111\rangle) \mapsto \\ & \frac{1}{2} ((|0\rangle \otimes |1\rangle) \otimes (|0\rangle \otimes |1\rangle) \otimes |0\rangle \otimes (|0\rangle \otimes |-1\rangle) \otimes (|0\rangle \otimes |i\rangle) \otimes |0\rangle \\ & (|0\rangle \otimes |-1\rangle) \otimes (|0\rangle \otimes |-1\rangle) \otimes |0\rangle \otimes (|0\rangle \otimes |-1\rangle) \otimes (|0\rangle \otimes |-i\rangle) \otimes |0\rangle \\ & (|0\rangle \otimes |1\rangle) \otimes (|0\rangle \otimes |1\rangle) \otimes |1\rangle \otimes (|0\rangle \otimes |-1\rangle) \otimes (|0\rangle \otimes |i\rangle) \otimes |1\rangle \\ & (|0\rangle \otimes |-1\rangle) \otimes (|0\rangle \otimes |-1\rangle) \otimes |0\rangle \otimes (|0\rangle \otimes |-1\rangle) \otimes (|0\rangle \otimes |-i\rangle) \otimes |1\rangle) \\ & = (|\hat{0}\rangle \otimes |0\rangle \otimes |\hat{1}\rangle \otimes |0\rangle \otimes |\hat{2}\rangle \otimes |0\rangle \otimes |\hat{3}\rangle \otimes |0\rangle \\ & \quad |\hat{0}\rangle \otimes |1\rangle \otimes |\hat{1}\rangle \otimes |1\rangle \otimes |\hat{2}\rangle \otimes |1\rangle \otimes |\hat{3}\rangle \otimes |1\rangle) \end{aligned}$$

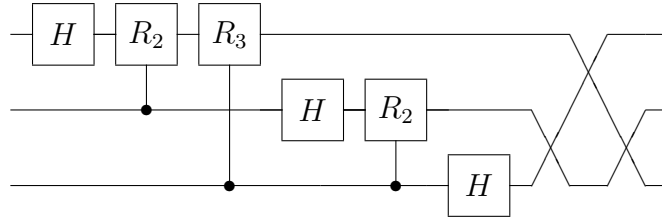
Wie bei der Zwischenüberlegung gezeigt wurde, versieht die Schaltung



für $x_3 = 1$ das dritte Qubit mit geeigneten Phasen,

$$\begin{aligned} & (|\hat{0}\rangle \otimes |0\rangle \otimes |\hat{1}\rangle \otimes |0\rangle \otimes |\hat{2}\rangle \otimes |0\rangle \otimes |\hat{3}\rangle \otimes |0\rangle \\ & \quad |\hat{0}\rangle \otimes |1\rangle \otimes |\hat{1}\rangle \otimes |1\rangle \otimes |\hat{2}\rangle \otimes |1\rangle \otimes |\hat{3}\rangle \otimes |1\rangle) \\ \mapsto & (|\hat{0}\rangle \otimes |0\rangle \otimes |\hat{1}\rangle \otimes |0\rangle \otimes |\hat{2}\rangle \otimes |0\rangle \otimes |\hat{3}\rangle \otimes |0\rangle \\ & \quad |\hat{0}\rangle \otimes |1\rangle \otimes |\hat{1}\rangle \otimes e^{\frac{2\pi i}{4}} |1\rangle \otimes |\hat{2}\rangle \otimes e^{\frac{4\pi i}{4}} |1\rangle \otimes |\hat{3}\rangle \otimes e^{\frac{6\pi i}{4}} |1\rangle), \end{aligned}$$

so dass die Anwendung von $H \otimes \mathbf{1}_2 \otimes \mathbf{1}_2$ im Schaltkreis

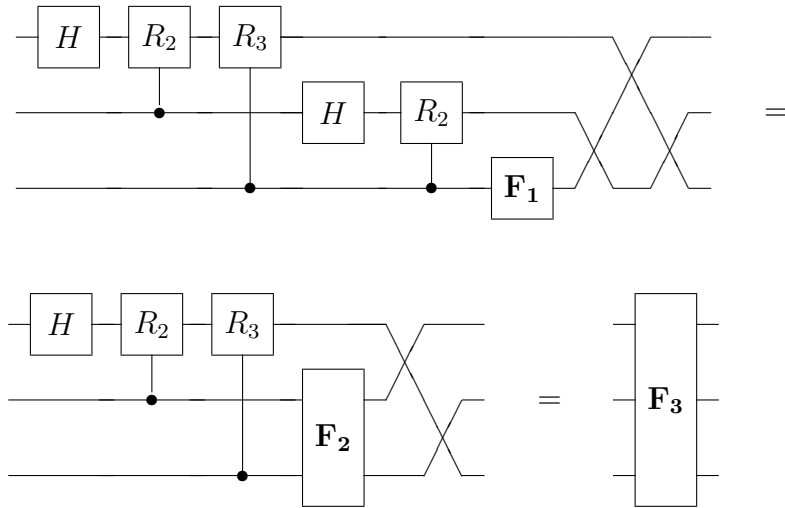


auf die Quantenfouriertransformation für drei Qubits, \mathbf{F}_3 , führt

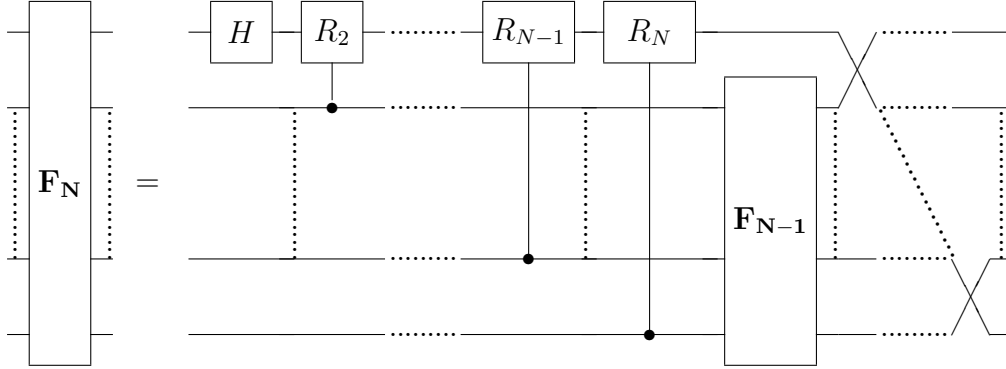
$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\sqrt{2}}(|\hat{0}\rangle_2 \otimes (|0\rangle + |1\rangle) \quad |\hat{1}\rangle_2 \otimes (|0\rangle + e^{\frac{2\pi i}{4}}|1\rangle) \\
 & \quad \quad \quad |\hat{2}\rangle_2 \otimes (|0\rangle + e^{\frac{4\pi i}{2}}|1\rangle) \quad |\hat{3}\rangle_2 \otimes (|0\rangle + e^{\frac{6\pi i}{4}}|1\rangle) \\
 & |\hat{0}\rangle_2 \otimes (|0\rangle - |1\rangle) \quad |\hat{1}\rangle_2 \otimes (|0\rangle - e^{\frac{2\pi i}{4}}|1\rangle) \\
 & \quad \quad \quad |\hat{2}\rangle_2 \otimes (|0\rangle - e^{\frac{4\pi i}{4}}|1\rangle) \quad |\hat{3}\rangle_2 \otimes (|0\rangle - e^{\frac{6\pi i}{4}}|1\rangle)) \\
 & = (|\hat{0}\rangle_3 \quad |\hat{1}\rangle_3 \quad |\hat{2}\rangle_3 \quad |\hat{3}\rangle_3 \quad |\hat{4}\rangle_3 \quad |\hat{5}\rangle_3 \quad |\hat{6}\rangle_3 \quad |\hat{7}\rangle_3),
 \end{aligned}$$

wobei $|\hat{k}\rangle_N$ die Fouriertransformierte bei N Qubits bezeichnet,

Damit lässt sich das Bildungsgesetz für die allgemeine Quantenfouriertransformation erkennen:



Dies motiviert die Induktionsannahme



Zum Induktionsschluss bedenke man zunächst, dass die *SWAP*-Gatter die Transformation

$$\begin{aligned}
 & (|0\rangle \otimes |\hat{0}\rangle_N \dots |0\rangle \otimes |2^{\hat{N}} - 1\rangle_N \quad |1\rangle \otimes |\hat{0}\rangle_N \dots |1\rangle \otimes |2^{\hat{N}} - 1\rangle_N) \\
 \mapsto & (|\hat{0}\rangle_N \otimes |0\rangle \dots |2^{\hat{N}} - 1\rangle_N \otimes |0\rangle \quad |\hat{0}\rangle_N \otimes |1\rangle \dots |2^{\hat{N}} - 1\rangle_N \otimes |1\rangle)
 \end{aligned}$$

erzeugen. Die N gesteuerten R_n -Gatter, $n = N+1, N, \dots, 2$, liefern nach der Zwischenüberlegung die Multiplikation von rechts mit der Diagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} 2^{N-1} \\ \oplus \\ 1 \end{pmatrix} \oplus \text{diag}(1, e_{N+1}, e_{N+1}^2, \dots, e_{N+1}^{2^N-1}).$$

Dies ergibt

$$\begin{aligned}
 \mapsto & (|\hat{0}\rangle_N \otimes |0\rangle \quad |\hat{1}\rangle_N \otimes |0\rangle \dots |2^{\hat{N}} - 1\rangle_N \otimes |0\rangle \dots \\
 & \dots |\hat{0}\rangle_N \otimes |1\rangle \quad |\hat{1}\rangle_N \otimes e^{\frac{2\pi i}{2^{N+1}}} |1\rangle \dots |2^{\hat{N}} - 1\rangle_N \otimes e^{\frac{(2^{\hat{N}}-1)2\pi i}{2^{N+1}}} |1\rangle)
 \end{aligned}$$

Die Anwendung des Hadamardgatters am ersten Qubit führt schließlich auf

$$\begin{aligned}
 \mapsto & |\hat{0}\rangle_N \otimes (|0\rangle + |1\rangle) \quad |\hat{1}\rangle_N \otimes (|0\rangle + e^{\frac{2\pi i}{2^{N+1}}} |1\rangle) \dots \\
 & \dots |2^{\hat{N}} - 1\rangle_N \otimes (|0\rangle + e^{\frac{(2^{\hat{N}}-1)2\pi i}{2^{N+1}}} |1\rangle) \\
 = & (|\hat{0}\rangle_{N+1} \quad |\hat{1}\rangle_{N+1} \dots |2^{N+\hat{1}} - 1\rangle_{N+1}),
 \end{aligned}$$

denn man liest leicht ab, dass mit $k = 2^N y_1 + 2^{N-1} y_2 \dots + y_{N+1}$ die Phasenfaktoren im jeweils letzten Faktor gerade $e^{2\pi i 0, y_1 y_2 \dots y_{N+1}}$ sind. Damit ist die Induktionsannahme bestätigt.