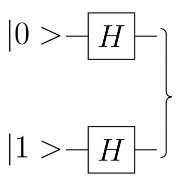
Quantum Computation:
Zusammenfassung der 6. Vorlesung (21.11.08)

2 *Quantenalgorithmen*

2.1.1 *Der Deutsch Algorithmus*

Um festzustellen, ob ein vorgelegtes 1-Bitgatter einen reversiblen monadischen Wahrheitswertfunktor F implementiert oder nicht, muss man klassisch zwei Versuche machen: Man muss $F(0)$ und $F(1)$ ermitteln. Ist der Funktor unitär implementiert, dann gelingt es mit dem Deutschalgorithmus, die Antwort auf diese Frage mit nur einem Versuch zu erhalten. Das besondere dabei ist, dass man bei klassischer Vorgehensweise dazu das Gatter bestimmen muß, dies bei quantenmechanischer Vorgehensweise aber mit Hilfe des Überlagerungsprinzips umgehen kann.

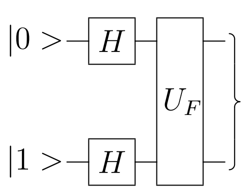
Eine geeignete Überlagerung der Basiszustände von zwei Qubits erhält man mit



$$(|00> \ |01> \ |10> \ |11>) \begin{pmatrix} H & 0 \\ 0 & H \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \tfrac{1}{2}(|00> -|01> +|10> -|11>).$$

Damit folgt aufgrund der Linearität von U_F

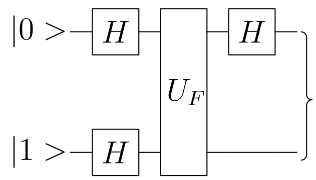


$$\tfrac{1}{2}(|0F(0)> -|0(1 \oplus F(0))> +|1F(1)> -|1(1 \oplus F(1))>)$$

$$= \tfrac{1}{2}((-1)^{F(0)}|0> \otimes(|0> -|1>) + (-1)^{F(1)}|1> \otimes(|0> -|1>)$$

$$= (-1)^{F(0)} \tfrac{1}{\sqrt{2}}(|0> +(-1)^{F(0)+F(1)}|1>) \otimes \tfrac{1}{\sqrt{2}}(|0> -|1>).$$

Wegen $H\frac{1}{\sqrt{2}}(|0> +|1>) = |0>$ und $H\frac{1}{\sqrt{2}}(|0> -|1>) = |1>$ gilt schließlich:

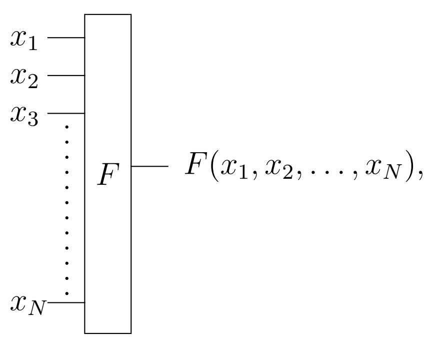


$$(-1)^{F(0)} \begin{cases} |0> \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0> - |1>) & \text{falls } F(0) = F(1) \\ |1> \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0> - |1>) & \text{falls } F(0) \neq F(1) \end{cases}$$

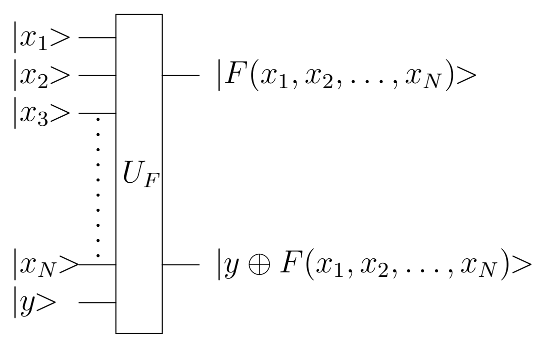
Eine Messung der Observablen $|0><0|$ am ersten Qubit mit dem Ergebnis “1” zeigt also an, dass das unbekannte Gatter irreversibel ist. Falls die Messung das Ergebis “0” liefert, ist das unbekannte Gatter reversibel.

2.1.2 *Der Deutsch-Jozsa-Algorithmus*

Eine Verallgemeinerung des Deutsch-Algorithmus auf eine Klasse N-adischer Wahrheitswertfunktoren ist der Deutsch-Jozsa-Algorithmus: Der vorgelegte Funktor $F : \{0,1\}^N \to \{0,1\}$ muß entweder konstant oder gleichgewichtet sein, wobei letzteres bedeutet, dass der Funktor für 2^{N-1} Eingaben wahr und für 2^{N-1} Eingaben falsch ist. Der Algorithmus zeigt dann, welcher der beiden Fälle vorliegt. Für $N = 1$ reduziert sich diese Fragestellung auf die des Deutschalgorithmus. Als unbekanntes Gatter diese Klasse sei vorgelegt



und



sei die unitäre Implementation. Für die Multiqubit-Basiszustände hatten wir schon die Bezeichnung $|k) = |x_1 x_2 \ldots x_N>$, wobei k die Dezimalzählung ist, eingeführt, von der wir jetzt Gebrauch machen. Mit

$$H|0> = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0> + |1>)$$

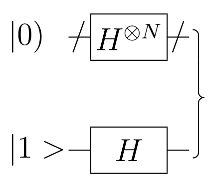
als Induktionsanfang und

$$H^{\otimes N}|0) = \frac{1}{\sqrt{2^N}} \sum_0^{2^N-1} |k)$$

als Induktionsannahme bestätigt

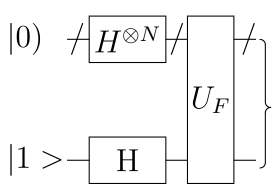
$$\begin{aligned} H^{\otimes(N+1)}|0) &= (\mathbf{1} \otimes H) \frac{1}{\sqrt{2^N}} \sum_0^{2^N-1} (|k) \otimes |0 >) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2^{N+1}}} \sum_0^{2^N-1} (|k) \otimes (|0 > + |1 >)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2^{N+1}}} \sum_0^{2^{N+1}-1} |k') \end{aligned}$$

wobei $|k) \otimes |x >= |k')$ mit $k' = 2^N x_1 + 2^{N-1} x_2 + \cdots + 2x_N + x$ ist, die Annahme. Eine geeignete Überlagerung der Basiszustände wird somit durch



$$\frac{1}{\sqrt{2^N}} \sum_0^{2^N-1} |k) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} (|0 > -|1 >)$$

erzeugt und die Linearität von U_F liefert



$$\frac{1}{\sqrt{2^{N+1}}} \sum_0^{2^N-1} (|k) \otimes (|F(k) > -|1 \oplus F(k) >)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2^{N+1}}} \sum_0^{2^N-1} (-1)^{F(k)} (|k) \otimes (|0 > -|1 >).$$

Sei nun für $|k) = |x_1 x_2 \ldots x_N >$ und $|l) = |y_1 y_2 \ldots y_N >$

$$k \cdot l := \sum_1^N x_j y_j,$$

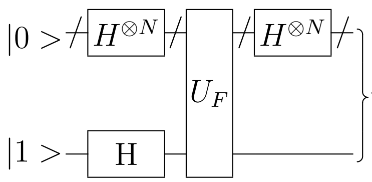
dann gilt

$$(k|H^{\otimes N}|l) = \frac{1}{\sqrt{2^N}} (-1)^{k \cdot l}.$$

Dies gilt für $N = 1$ und mit der Induktionsannahme folgt

$$
\begin{aligned}
&< x_1 x_2 \dots x_N x_{N+1} | H^{\otimes (N+1)} | y_1 y_2 \dots y_N y_{N+1 >} \\
&= (k | H^{\otimes N} | l) < x_{N+1} | H | y_{N+1} > \\
&= \frac{1}{\sqrt{2^{N+1}}} (-1)^{k_N \cdot l_N} (-1)^{x_{N+1} \cdot y_{N+1}} = \frac{1}{\sqrt{2^{N+1}}} (-1)^{k_{N+1} \cdot l_{N+1}},
\end{aligned}
$$

was die Induktionsannahme bestätigt.



$$\frac{1}{\sqrt{2^{N+1}}} \sum_{k,l=0}^{2^N-1} (-1)^{k \cdot l + F(k)} |l) \otimes (|0> - |1>)$$

$$
\begin{aligned}
= \tfrac{1}{\sqrt{2^{N+1}}} \big(|0) \otimes \textstyle\sum_{k=0}^{2^N-1} (-1)^{F(k)} (|0> - |1>) \\
+ \textstyle\sum_{l=1}^{2^N-1} \sum_{k=0}^{2^N-1} (-1)^{k \cdot l + F(l)} |l) \otimes (|0> - |1>) \big).
\end{aligned}
$$

Die resultierende Wellenfunktion besteht so aus zwei zueinander orthogonalen Anteilen , von denen der erste genau dann verschwindet, wenn F gleichgewichtet ist. Ist F konstant dann ist der erste Anteil der Einheitsvektor $\pm|0> \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0> - |1>)$ und der zweite muss verschwinden. Liefert die Messung von $|0><0|$ am ersten System “1”, dann ist F konstant, liefert sie “0” dann ist F gleichgewichtet (equilibriert).