Instabile Lichtorbits in der Kerr-Raumzeit[1]

a) Für $a = 0$ erhält man gerade die Schwarzschild-Lösung zurück, welche die kugelsymmetrische Vakuum-Lösung der einsteinschen Feldgleichungen beschreibt. An der Metrik erkennt man, dass für $a \neq 0$ die Kugelsymmetrie gestört ist (anhand der verbogenen Koordinaten der Kugelfläche) und ausserdem Nicht-Digonalelemememente der Metrik auftreten, welche für $\Theta = \pi/2$ gerade einen konstanten Wert (d.h. 1) liefern.

b) Die Lagrangefunktion lautet für den Fall $\Theta = \pi/2$:

$$ds^2 = L = \left(1 - \frac{2m}{r^2}\right)\dot{t}^2 + \frac{4ma}{r}\dot{t}\dot{\phi} - \frac{r^2}{r^2 - 2mr + a^2}\dot{r}^2 - \\ - \left(r^2 + a^2 + \frac{2ma^2}{r}\right)\dot{\phi}^2. \tag{1}$$

Man erkennt, dass die zyklischen Koordinaten hier t und ϕ sind. Daher kann man die Bewegungsgleichungen für t und ϕ leicht Aufstellen und hat die ersten Integrale der Bewegung

$$\left(1 - \frac{2m}{r^2}\right)\dot{t} + \frac{2ma}{r}\dot{\phi} = E \tag{2}$$

$$\frac{2ma}{r}\dot{t} - \left(r^2 + a^2 + \frac{2a^2m}{r}\right)\dot{\phi} = -l, \tag{3}$$

wobei die Integrationskonstanten (entsprechend ihrer physikalischen Bedeutung) mit E und $-l$ bezeichnet wurden.

Nun ist es einfach die beiden Variablen aus den Gleichungen (2) und (3) zu separieren. Man erhält

$$\dot{t} = \frac{1}{\Delta}\left(E\left(r^2 + a^2 + \frac{2a^2m}{r}\right) - \frac{2ma}{r}l\right) \tag{4}$$

$$\dot{\phi} = \frac{1}{\Delta}\left(\left(1 - \frac{2m}{r}\right)l + \frac{2ma}{r}E\right), \tag{5}$$

wobei $\Delta = r^2 - 2mr + a^2$ ist (wie in der Metrik).

c) Licht als Testteilchen heisst, dass man hier Nullgeodäten sucht, daher ergibt sich $ds^2 = 0$. Da dies auch der Lagrangefunktion L entspricht, folgt also auch $L = 0$. Somit kann die Gleichung (1) als drittes erstes Integral der Bewegung untersucht werden (für die Koordinate r). Um dies in geeigneter Form auswerten zu können ist es nützlich die Gleichungen (4) und (5) zu

[1] Lösung von T. Chrobok, Institut für Theoretische Physik, TU Berlin

benutzen um die Abhängigkeiten von $\dot{t}$ und $\dot{\phi}$ zu eleminieren. (Dies geschieht am besten mit dem Computer.) Man erhält als Bewegungsgleichung in r

$$\dot{r}^2 = E^2 + \frac{2m}{r^3}(aE - l)^2 + \frac{1}{r^2}(a^2E^2 - l^2). \tag{6}$$

Dies bestimmt nun die Bewegung in r Richtung, wodurch sich die kritischen Orbits r_c ergeben, wenn gilt $\dot{r} = 0$ und $\ddot{r} = 0$. Die erste Bedingung ist folglich direkt aus Gleichung (6) ablesbar

$$0 = E^2 + \frac{2m}{r_c^3}(aE - l)^2 + \frac{1}{r_c^2}(a^2E^2 - l^2) \tag{7}$$

und die zweite Bedingung erhält man durch Ableitung von (6) nach r und Null setzen der sich ergebenden Gleichung für r_c, da sich auf dieser Bahn gerade r nicht ändern soll:

$$0 = -\frac{6m}{r_c^4}(aE - l)^2 - \frac{2}{r_c^3}(a^2E^2 - l^2). \tag{8}$$

Die letzte Gleichung läßt sich einfach umformen zu

$$r_c = \frac{3m(l - aE)}{l + aE}, \tag{9}$$

was zeigt, dass für $a = 0$ (Schwarzschild) der kritische instabile Photonenorbit durch $r_c = 3m$ bestimmt ist. (Dieser ist dort eine Kugelfläche, welche durch die Symmetrie der Raumzeit bedingt ist.)

d) Man kann nun Gleichung (9) in Gleichung (7) einsetzen, so dass man einen Zusammenhang zwischen den Erhaltungsgrößen und den Parametern der Kerr-Metrik erhält

$$E^2 = \frac{(l + aE)^3}{27m^2(l - aE)}. \tag{10}$$

Wenn man jetzt den Stoßparameter $D = l/E$ einführt, ergibt sich umgehend

$$27m^2(D - a) = (D + a)^3. \tag{11}$$

Mittels der Substitution $y = D + a$ folgt dann

$$y^3 - 27m^2y + 54m^2a = 0, \tag{12}$$

was sich zumindest für den Fall e) elementar lösen lässt.

e) Für $a = m$ erhält man als positive reelle Lösung von Gleichung (12) $y = 3m$. Macht man jetzt die Substitution rückgängig erhält man $D = 2m$ und somit durch Gleichung (10) $2mE = l$.

Dies kann in Gleichung (9) eingesetzt werden, so dass man für $r_c = m$ erhält. Analog ergibt sich für $a = -m$ für $r_c = 4m$.

Somit sind für den Fall einer extremen Kerr-Lösung die beiden instabilen Photonenorbits bestimmt in Abhängigkeit davon ob ein pro- oder retrograder Umlauf stattfindet.