Die Killingvektoren der äußeren Schwarzschild-Raumzeit [1]

Die Killinggleichung lautet

$$g_{ab,c}\xi^c + g_{ac}\xi^c, b + g_{bc}\xi^c{}_{,a} = 0. \tag{1}$$

Das dies äquivalent zu der kovarianten Charakterisierung

$$\xi_{(a;b)} = 0 \tag{2}$$

ist, zeigt man leicht in dem man die Gleichung (2) ausschreibt und vereinfacht. Für solche Systeme (1) partieller Differentialgleichungen gibt es im allgemeinen kein Lösungsverfahren. Zudem ist das Differentialgleichungssystem überbestimmt. Es existieren zehn Bestimmungsgleichungen für die vier unabhängigen Funktionen ξ^a. Jedoch kann man in bestimmten Fällen zeigen, dass Lösungen existieren indem man versucht das Differentialgleichungssystem schrittweise zu lösen.

Diese ist zunächst für alle Komponenten aufzustellen und weitestgehend zu vereinfachen. Es ergibt sich

$$(a=b=t) \qquad \xi^r + \frac{2r^2}{a}\left(1-\frac{a}{r}\right)\xi^t{}_{,t} = 0 \tag{3}$$

$$(a=b=r) \qquad \xi^r - \frac{2r^2}{a}\left(1-\frac{a}{r}\right)\xi^r{}_{,r} = 0 \tag{4}$$

$$(a=b=\Theta) \qquad \xi^r + r\xi^\Theta{}_{,\Theta} = 0 \tag{5}$$

$$(a=b=\phi) \qquad \xi^r + rcot\Theta\xi^\Theta + r\xi^\phi{}_{,\phi} = 0 \tag{6}$$

$$(a=t, \quad b=r) \qquad \xi^r{}_{,t} - \left(1-\frac{a}{r}\right)^2\xi^t{}_{,r} = 0 \tag{7}$$

$$(a=t, \quad b=\Theta) \qquad \xi^t{}_{,\Theta} - r^2\left(1-\frac{a}{r}\right)^{-1}\xi^\Theta{}_{,t} = 0 \tag{8}$$

$$(a=t, \quad b=\phi) \qquad \xi^t{}_{,\phi} - r^2\left(1-\frac{a}{r}\right)^{-1} sin^2\Theta\xi^\phi{}_{,t} = 0 \tag{9}$$

$$(a=r, \quad b=\Theta) \qquad \xi^r{}_{,\Theta} + r^2\left(1-\frac{a}{r}\right)\xi^\Theta{}_{,r} = 0 \tag{10}$$

$$(a=r, \quad b=\phi) \qquad \xi^r{}_{,\phi} + r^2\left(1-\frac{a}{r}\right) sin^2\Theta\xi^\phi{}_{,r} = 0 \tag{11}$$

$$(a=\Theta, \quad b=\phi) \qquad \xi^\Theta{}_{,\phi} + sin^2\Theta\xi^\phi{}_{,\Theta} = 0. \tag{12}$$

Die Frage ist nun ob man beispielsweise eine der Gleichungen intergrieren kann, oder ob man aus der Summation von verschiedenen Gleichungen eine

[1] Lösung von T. Chrobok, Institut für Theoretische Physik, TU Berlin

integrable Gleichung erhält. Es existiert daher kein kanonischer Weg wie vorzugehen ist. Im Folgenden ist ein Lösungsvorschlag dargestellt, der weder den Anspruch erhebt der kürzeste noch der eingängigste Weg zu sein. Hier kann man recht einfach erkennen, dass Gleichung (4) ohne große Mühe zu integrieren ist. Es ergibt sich

$$\int \frac{\xi^r{}_{,r}}{\xi^r} dr = \int \frac{a}{2r(r-a)} dr, \tag{13}$$

was einfach zu integrieren ist

$$\xi^r = \sqrt{1 - \frac{a}{r}} G(t, \Theta, \phi). \tag{14}$$

Es ist zu beachten, dass die bei der Integration auftretende Konstante eine Funktion der verbleibenden Variablen sein kann.

Der schnellste Weg nun voran zu kommen ist der Folgende. Man leite Gleichung (3) nach r ab und leite Gleichung (7) nach t ab und summiere so, dass die gemischten Ableitungen $\xi^t{}_{,t,r}$ nicht mehr auftreten. Es ergibt sich dann folgende Gleichung

$$F(r)G(t, \Theta, \phi) = G(t, \Theta, \phi)_{,t,t}. \tag{15}$$

Wobei $F(r)$ eine recht komplizierte Funktion von r ist, die sich durch die Ableitungen ergeben hat. Diese Funktion ist gemeinhin ungleich Null und muss für alle Werte von r befriedigt werden. Dies ist nur möglich wenn

$$G(t, \Theta, \phi) = 0 \tag{16}$$

gilt. Somit ist auch

$$\xi^r = 0. \tag{17}$$

Damit vereinfacht sich das verbleibende Gleichungssystem stark. Aus den Gleichung (3) und (7) folgt:

$$\xi^t = \xi^t(\phi, \Theta). \tag{18}$$

Aus den Gleichungen (5) und (10) ergibt sich

$$\xi^\Theta = \xi^\Theta(t, \phi) \tag{19}$$

sowie aus Gleichung (11)

$$\xi^\phi = \xi^\phi(t, \Theta, \phi). \tag{20}$$

Ein wesentlicher Teil des partiellen Differentialgleichungssystems ist somit gelöst und es verbleiben die Gleichungen (6, 8, 9, 12) in vereinfachter Form

$$cot\Theta\xi^{\Theta} + \xi^{\phi}{}_{,\phi} = 0 \tag{21}$$

$$\xi^{t}{}_{,\Theta} - r^2 \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1} \xi^{\Theta}{}_{,t} = 0 \tag{22}$$

$$\xi^{t}{}_{,\phi} - r^2 \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1} sin^2\Theta\xi^{\phi}{}_{,t} = 0 \tag{23}$$

$$\xi^{\Theta}{}_{,\phi} + sin^2\Theta\xi^{\phi}{}_{,\Theta} = 0. \tag{24}$$

Der gleiche Trick wie zur Bestimmung von ξ^r kann nun für die Gleichungen (21) und (24) benutzt werden. Die Ableitung von Gleichung (21) nach Θ und von Gleichung (24) nach ϕ und Summation ergibt

$$\xi^{\Theta} + \xi^{\Theta}_{,\phi,\phi} = 0. \tag{25}$$

Die Lösungen dieser Gleichung sind elementar und lauten

$$\xi^{\Theta}_1 = c_1(t)cos\phi \qquad \xi^{\Theta}_2 = c_2(t)sin\phi. \tag{26}$$

(Beachte auch die triviale Lösung, siehe unten.) Beide Lösungen in Gleichung (21) eingesetzt, ermöglichen auch die Integration für ξ^{ϕ}, so dass man erhält

$$\xi^{\phi}_1 = \int -cot\Theta c_1(t)cos\phi d\phi = -cot\Theta c_1(t)sin\phi + g_1(t,\Theta) \tag{27}$$

$$\xi^{\phi}_2 = \int -cot\Theta c_2(t)sin\phi d\phi = cot\Theta c_2(t)cos\phi + g_2(t,\Theta). \tag{28}$$

Da Gleichung (24) bis jetzt nur in abgeleiteter Form in die Behandlung eingeflossen ist, kann diese verwendet werden um die Lösungen (26, 27, 28) zu überprüfen, was impliziert

$$g_1(t,\Theta)_{,\Theta} = 0 \Longrightarrow g_1(t,\Theta) = g_1(t) \tag{29}$$

$$g_2(t,\Theta)_{,\Theta} = 0 \Longrightarrow g_2(t,\Theta) = g_2(t). \tag{30}$$

Es verbleiben nun nur die Gleichungen (22) und (23) um die freien Funktionen zu bestimmen. Zunächst erkennt man, durch Ableitung von Gleichung (22) nach t, dass

$$c_1(t)_{,t,t} = 0 \qquad c_2(t)_{,t,t} = 0 \tag{31}$$

ist und somit die Funktionen $c(t)$ nur linear in t sein können. Das gleiche Resultat erhält man für die Funktionen $g(t)$ durch Ableitung von Gleichung

(23) nach t. Wenn nun Gleichung (22) nach ϕ und Gleichung (23) nach Θ abgeleitet und addiert werden, erkennt man, dass die in t linearen Koeffizienten von c und g identisch Null sein müssen. Die konstanten Koeffizienten können dann jeweils zu 1 gesetzt werden. Damit sind ξ^ϕ und ξ^Θ unabhängig von t und aus den Gleichungen (22) und (23) folgt, dass auch ξ^t konstant sein muss. Als einen Spezialfall der bei der Wahl der Konstanten beachtet werden muss, verblieb die triviale Lösung $\xi^\Theta = 0$, die auf $\xi^\phi = const = 1$ führt.

Daher erhält man als Lösung des obigen partiellen Differentialgleichungssystems folgende vier linear unabhängige Lösungen

$$\xi_0^t = 1 \tag{32}$$

$$\xi_1^\Theta = cos\phi \qquad \xi_1^\phi = -cot\Theta sin\phi \tag{33}$$

$$\xi_2^\Theta = sin\phi \qquad \xi_2^\phi = cot\Theta cos\phi \tag{34}$$

$$\xi_3^\phi = 1. \tag{35}$$

Dies lässt sich als System von vier linear unabhängigen Killingvektoren

$$\xi_0 = \frac{\partial}{\partial t} \tag{36}$$

$$\xi_1 = cos\phi\frac{\partial}{\partial\Theta} - cot\Theta sin\phi\frac{\partial}{\partial\phi} \tag{37}$$

$$\xi_2 = sin\phi\frac{\partial}{\partial\Theta} + cot\Theta cos\phi\frac{\partial}{\partial\phi} \tag{38}$$

$$\xi_3 = \frac{\partial}{\partial\phi} \tag{39}$$

schreiben.