Technische Universität Berlin
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. H.-H. v. Borzeszkowski
Dr. T. Chrobok

25. Januar 2010

Zusatz-Übungsblatt zur Allgemeinen Relativitätstheorie II

Abgabe: Dienstag 09.02.10 vor der Übung

Aufgabe 1 (10 Zusatz- Punkte): ***Abelsche Chern-Simons Theorie und Zwangsbedingungen***

Um sich die Eigenarten einiger Feldtheorien anzuschauen benutzt man gerne niedrigdimensionale Vereinfachungen. Ein beliebtes Modell ist die 3-dimensionale abelsche Chern-Simons Theorie (also zwei Raum- und eine Zeitdimension) die durch die Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \frac{\kappa}{4} A^a \epsilon_{abc} F^{cb} + A^a J_a \tag{1}$$

gegeben ist, wobei κ eine Kopplungskonstante, ϵ_{abc} der 3-dimensionale total antisymmetrische Tensor und A^a ein Vektorpotential ist. Dieses Vektorpotential definiert auch den Feldstärketensor $F_{ab} = \partial_a A_b - \partial_b A_a$ und koppelt an den äußeren Strom J^a, welcher der Kontinuitätsgleichung $\partial^a J_a = 0$ gehorchen soll.

a) Bestimmen Sie aus der Lagrangedichte (1) die Impulsfunktionen $\Pi_k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\frac{\partial A^k}{\partial t})}$ explizit. Was fällt an Π_0 auf? Was fällt an Π_1 und Π_2 auf? Geben Sie den drei Bedingungen einen Namen - am besten ϕ_m.

b) Bestimmen Sie den Integralausdruck für die Hamilton-Funktion $H = \int_{V_2} d^2x \mathcal{H}$ für die Hamiltonsche-Dichte $\mathcal{H} = \Pi_k \frac{\partial A^k}{\partial t} - \mathcal{L}$ des Chern-Simons Feldes. Ergänzen Sie die Hamiltonsche-Dichte $\mathcal{H}$ zu einer Hamiltonschen-Dichte, welche den Bedingungen ϕ_m gerecht wird, indem Sie diese durch Lagrange-Multiplikatoren u^m erweitern, d.h. $\mathcal{H}_p = \mathcal{H} + u^m \phi_m$ bilden. Formulieren Sie nun die fundamentalen Poisson-Klammern der Feldfunktionen A^a und der Impulsfunktionen Π_b.

c) Bilden Sie nun die zeitliche Entwicklung der so konstruierten Hamiltonschen-Dichte $\mathcal{H}_p$ mit den Bedingungen ϕ_m, d.h. berechnen Sie $\frac{\partial \phi_m}{\partial t} = \int_{V_2} d^2y [\phi_m(x), \mathcal{H}_p(y)]$. Setzen Sie **danach** $\frac{\partial \phi_m}{\partial t}$ gleich Null. Was fällt wiederum auf? Was kann man vielleicht noch tun?