Technische Universität Berlin
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. H. v. Borzeszkowski
Dr. T. Chrobok

3. November 2009

3. Übungsblatt zur Allgemeinen Relativitätstheorie II

Abgabe: Dienstag 17.11.09 vor der Übung

Aufgabe 1 (7 Punkte): *Vakuumfeldgleichungen und Variationsprinzip*

Leiten Sie die Einsteinschen Vakuumfeldgleichungen aus der Lagrangedichte

$$L = \sqrt{-g}R$$

ab, dabei bezeichnen g die Determinante des metrischen Tensors und $R = g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}$ den Ricci-Skalar.

a) Setzen Sie das Hamiltonsche Prinzip an und variieren Sie das Wirkungsintegral nach der Metrik. Die Variation $\delta g_{\rho\nu}$ sei so durchgeführt, dass $\delta g_{\rho\nu} = \partial_\mu(\delta g_{\rho\nu}) = 0$ auf dem Rand ∂V gilt.

b) Formen Sie unter Benutzung von

$$g_{,\rho} = g g^{\nu\mu} g_{\nu\mu,\rho}$$

und $g_{\alpha\nu}g^{\nu\mu} = \delta^\mu_\alpha$ die Variationen nach $g_{\nu\mu}$ und der Determinante g um. Man erhält an dieser Stelle bereits die Vakuumfeldgleichungen wenn man annimmt, dass die Variation des dritten bei der Variation auftretenden Terms keinen Beitrag liefert.

c) Zeigen Sie, dass der Term der proportional zu $\delta R_{\alpha\beta}$ ist, keinen Beitrag liefert. Dazu schreiben Sie den aus der Definition des Krümmungstensors folgenden Ricci-Tensor auf und bilden dessen Variation, wobei Sie annehmen, dass Variation und partielle Ableitungen vertauschen. Werten Sie diese Gleichung im lokal-geodätischen Bezugsystem aus in dem $\delta\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}|_p = 0$ gilt (deren Ableitungen verschwinden nicht).

In der auftretenden Gleichung können die partiellen Ableitungen durch kovariante ersetzt werden, da die $\delta\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ tensorielle Größen sind, d.h. die Gleichung gilt in jedem Bezugsystem.

Ziehen Sie die vor der Variation stehenden Faktoren mittels des Lemmas von Ricci und der Beziehung

$$\sqrt{-g}T^\mu{}_{;\mu} = (\sqrt{-g}T^\mu)_{,\mu}$$

in die Ableitung und formen Sie diese damit um.

Schreiben Sie diesen Teil der Variation in ein Randintegral um. Wann verschwindet dessen Beitrag auf ∂V?

Zeigen Sie unter den oben gemachten Annahmen für die Metrik auf dem Rand des Integrationsgebietes, dass $\delta\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = 0$ gilt.

Aufgabe 2 (3 Punkte): *Energie-Impuls-Bilanz und Bewegungsgleichungen*

Zeigen Sie mit Hilfe der in der Übung abgeleiteten Bewegungungsgleichung des Klein-Gordon-Feldes

$$g^{\alpha\lambda}\psi_{;\alpha;\lambda} + m^2\psi - 2\lambda^2\psi^3 = 0,$$

dass der Energie-Impuls-Tensor des Klein-Gordon-Feldes

$$T^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta}\frac{1}{2}(g^{\rho\lambda}\psi_{,\rho}\psi_{,\lambda} - m^2\psi^2 + \lambda^2\psi^4) - g^{\alpha\kappa}g^{\beta\lambda}\psi_{,\kappa}\psi_{,\lambda}$$

eine verschwindende Divergenz besitzt.