

10. Übungsblatt zur Allgemeinen Relativitätstheorie II

Abgabe: Dienstag 26.01.10 vor der Übung

Aufgabe 1 (5 Punkte): Grundbegriffe der Feldtheorie anhand der Klein-Gordon-Gleichung

Betrachten Sie die Lagrange-Dichte eines relativistischen spinlosen Feldes (Klein-Gordon-Feld)

$$\mathcal{L} = -\frac{\hbar^2}{2m_0}(\Psi^*_{,m}\Psi^{,m} + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2}\Psi^*\Psi) = -\frac{\hbar^2}{2m_0}(\text{grad}\Psi^*\text{grad}\Psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial\Psi^*}{\partial t}\frac{\partial\Psi}{\partial t} + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2}\Psi^*\Psi) \quad (1)$$

worin Ψ die Feldfunktion bzw. Ψ^* die komplex-konjugierte Feldfunktion sind.

a) Bestimmen Sie aus der Lagrangedichte (1) die Impulsfunktion und die kanonisch konjugierten Impulse $\Pi^K = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\frac{\partial U^K}{\partial t})}$ und $\Pi^{Ki} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial U_{K,i}}$.

b) Leiten Sie die Lagrange-Gleichungen

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial U} - \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial U_{,m}}\right)_{,m} = 0$$

für die Felder Ψ und Ψ^* ab (Klein-Gordon-Gleichung).

c) Benutzen Sie die in b) gewonnenen Ergebnisse um die Kontinuitätsgleichung

$$(\Psi^*\Psi^{,i} - \Psi^{*,i}\Psi)_{,i} = 0$$

für das Klein-Gordon-Feld abzuleiten.

d) Bestimmen Sie die Hamiltonsche-Dichte $\mathcal{H} = \Pi^K \frac{\partial U^K}{\partial t} - \mathcal{L}$ des Klein-Gordon-Feldes.

e) Berechnen Sie den kanonischen Energie-Impuls-Tensor $\mathcal{T}_j^i = \Pi^{Ki} U_{K,j} - \mathcal{L}g_j^i$ des Klein-Gordon-Feldes, und zeigen Sie, dass dieser symmetrisch ist.

Aufgabe 2 (5 Punkte): Poisson-Klammern der Feldtheorie

Betrachten Sie die Integraldarstellung der Feldfunktionen

$$U_K(x^\mu, t) = \int_{V_3} U_K(\xi^\mu, t)\delta^{(3)}(x^\mu - \xi^\mu)d^{(3)}\xi$$

und der Integraldarstellung der Feldimpulsfunktionen

$$\Pi^K(x^\mu, t) = \int_{V_3} \Pi^K(\xi^\mu, t)\delta^{(3)}(x^\mu - \xi^\mu)d^{(3)}\xi.$$

Hierin bezeichnet $\delta^{(3)}$... die dreidimensionale Deltadistribution. Die Poissonklammer von zwei Feldfunktionalen F, G ist definiert durch

$$[F, G] = \int_{V_3} \left(\frac{\partial F}{\partial U_M} \frac{\partial G}{\partial \Pi^M} - \frac{\partial G}{\partial U_M} \frac{\partial F}{\partial \Pi^M} \right) d^{(3)}\xi,$$

wobei das Ableitungssymbol ∂ als Funktionalableitung zu verstehen sind.

a) Bestimmen Sie die folgenden fundamentalen Poissonklammern

$$\begin{aligned} & [U_K(x^\mu, t), U_L(\bar{x}^\mu, t)], \\ & [\Pi^K(x^\mu, t), \Pi^L(\bar{x}^\mu, t)], \\ & [U_K(x^\mu, t), \Pi^L(\bar{x}^\mu, t)]. \end{aligned}$$

b) Bestimmen Sie die Poissonklammern

$$\begin{aligned} & [F, U_L(\bar{x}^\mu, t)], \\ & [F, \Pi^L(\bar{x}^\mu, t)] \end{aligned}$$

für eine beliebige Größe F .