

2. Übungsblatt zur Allgemeinen Relativitätstheorie II

Abgabe: Dienstag 10.11.09 vor der Übung

Aufgabe 1 (10 Punkte): *Energie-Impuls-Tensor und Feldgleichungen aus dem Variationsprinzip*

Die Lagrangedichte des elektromagnetischen Feldes mit Quellen im Riemannschen Raum lautet:

$$L_M = \sqrt{-g} \left(\frac{c}{16\pi} F_{\kappa\mu} F_{\lambda\nu} g^{\kappa\lambda} g^{\mu\nu} - j_\kappa g^{\kappa\lambda} A_\lambda \right). \quad (1)$$

Hierbei sind A_κ das Vierer-Potential, j^κ der Strom und $F_{\alpha\beta} = A_{\beta;\alpha} - A_{\alpha;\beta}$ der (antisymmetrische) elektromagnetische Feldstärketensor.

a) Bestimmen Sie durch Ausführung der Variation:

$$T^{\alpha\beta} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(L_M)}{\delta g_{\alpha\beta}} \quad (2)$$

den Energie-Impuls-Tensor des elektromagnetischen Feldes. Warum müssen die Christoffelsymbole bei dieser Variation nicht beachtet werden? Achtung es muss ein symmetrischer Tensor herauskommen.

- b) Leiten Sie durch Variation nach den Vierer-Potentialen A_α die **kovarianten** inhomogenen Maxwellgleichungen ab. Da dieses Problem mit den zugehörigen Lagrange-Gleichungen äquivalent ist, können diese auch benutzt werden. **Hinweis:** Benutzen Sie die Identität $\Gamma_{\kappa\tau}^\kappa = \frac{g_{,\tau}}{2g}$.
- c) Beweisen Sie mit der in b) erhaltenen kovarianten inhomogenen Maxwellgleichung, dass die **kovariante** Ladungserhaltung $j^\kappa_{;\kappa} = 0$ gilt.
- d) Bestimmen Sie die Divergenz des in a) abgeleiteten Energie-Impuls-Tensor und vereinfachen Sie diese weitestgehend. Diskutieren Sie das Ergebnis.