

## 1. Übungsblatt zur Allgemeinen Relativitätstheorie II

**Abgabe: Dienstag 03.11.09** vor der Übung

### **Aufgabe 1 (10 Punkte): *Instabile Lichtorbits in der Kerr-Raumzeit***

Im Folgenden soll eine weitere exakte Vakuum-Lösung der Einsteinschen Feldgleichungen betrachtet werden, die Kerr-Lösung. Sie beschreibt das Gravitationsfeld eines rotierenden Schwarzen Lochs. Das Linienelement der Kerr-Raumzeit ist gegeben durch

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2mr}{\rho^2}\right) dt^2 + 4ma \frac{r \sin^2 \Theta}{\rho^2} dt d\phi - \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 - \rho^2 d\Theta^2 - \sin^2 \Theta \left( r^2 + a^2 + \frac{2mr}{\rho^2} a^2 \sin^2 \Theta \right) d\phi^2, \quad (1)$$

worin  $\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \Theta$ ,  $\Delta = r^2 - 2mr + a^2$  sind und  $m$  die Masse und  $a$  den Drehimpuls beschreiben.

- a) Betrachten Sie den Spezialfall der Bewegung in der Äquatorialebene  $\Theta = \pi/2$  und  $\dot{\Theta} = 0$ . Warum handelt es sich in diesem Fall um eine wesentliche Einschränkung der betrachteten Bahnen im Gegensatz zur Behandlung der Schwarzschild-Lösung? Was passiert für den Fall, dass  $a = 0$  gilt?
- b) Stellen Sie die Lagrangefunktion für den oben genannten Spezialfall auf. Welche Koordinaten sind zyklisch? Leiten Sie die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen für  $t, \phi$  ab. Wie in der Schwarzschild-Raumzeit erhält man hier erste Integrale der Bewegung. Bezeichnen Sie die zugehörigen Erhaltungsgrößen bitte mit  $E$  und  $l$ . Trennen Sie die Bewegungsgleichungen für  $t$  und  $\phi$ .
- c) Betrachten Sie nun Licht als Testteilchen und eliminieren Sie  $\dot{t}$  und  $\dot{\phi}$  aus der Bewegungsgleichung für  $r$ . Werten Sie diese Gleichung und deren erste Ableitung für  $\dot{r} = 0$  und  $\ddot{r} = 0$  aus (dies sind die Stabilitätsbedingungen). An dieser Stelle kann man für den Fall  $a = 0$  (Schwarzschild) den instabilen Photonorbit bestimmen. Hinweis: Es handelt sich um Bestimmungsgleichungen für den Wert von  $r$  auf denen die Lichtorbits instabil sind.
- d) Leiten Sie einen Zusammenhang zwischen den Erhaltungsgrößen und den Parametern der Kerr-Metrik her und führen Sie für die beiden Erhaltungsgrößen den so genannten Stoßparameter  $D = l/E$  ein. Hinweis: Sie erhalten dann eine kubische Gleichung in  $D$ , die sich durch die Substitution  $y = D + a$  in eine einfache Form bringen läßt.
- e) Lösen Sie die kubische Gleichung für die Werte  $a = m$  und  $a = -m$ . Bestimmen Sie jeweils den instabilen Photonorbit in Abhängigkeit von  $m$ .