Technische Universität Berlin
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. H.-H. v. Borzeszkowski
Dr. T. Chrobok

10. November 2009

4. Übungsblatt zur Allgemeinen Relativitätstheorie II

Abgabe: Dienstag 24.11.09 vor der Übung

Aufgabe 1 (10 Punkte): ***Killing-Vektoren und deren Berechnung für die äußere Schwarzschildmetrik***

Killing-Vektoren bezeichnen lokale Isometrien (Symmetrietransformationen) in der Raumzeit. Eine notwendige Bedingung für deren Existenz ist, dass ein Vektor ξ_α existiert, der die Gleichung

$$g_{\alpha\beta,\sigma}\xi^\sigma + 2g_{\lambda(\alpha}\xi^\lambda_{,\beta)} = 0 \tag{1}$$

erfüllt (Killing-Gleichung).
a) Zeigen Sie, dass dies zur kovarianten Charakterisierung $\xi_{(\alpha;\beta)} = 0$ äquivalent ist.

b) Bestimmen Sie für die Schwarzschildmetrik

$$ds^2 = (1 - \frac{a}{r})dt^2 - (1 - \frac{a}{r})^{-1}dr^2 - r^2(d\Theta^2 + sin^2\Theta d\phi^2) \tag{2}$$

die 4 Killing-Vektoren (einer ist zeitartig, drei sind raumartig).
Hinweise: Stellen Sie zunächst das vollständige partielle Differentialgleichungssystem auf. Aus drei dieser Gleichungen zeigt man, dass $\xi^1 = 0$ und ξ^0 nur eine Funktion von Θ und ϕ ist (eine Gleichung für ξ^1 kann direkt partiell integriert werden). Mittels der anderen Gleichungen erhält man dann ebenso Einschränkungen für ξ^2 und ξ^3. Die Gleichungen können dann entsprechend integriert werden. Beachten Sie bitte, dass die bei einer partiellen Integration auftretende „Konstante“, eine Funktion der noch verbleibenden Variablen ist!