Technische Universität Berlin
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. H.-H. v. Borzeszkowski
Dr. T. Chrobok

1. Dezember 2009

# 7. Übungsblatt zur Allgemeinen Relativitätstheorie II

**Abgabe: Dienstag 15.12.09** vor der Übung

Für kleine Abweichungen von der flachen Raumzeit kann die Einsteinsche Theorie linearisiert werden. Die Metrik

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} + \mathcal{O}(h^2)$$

soll nun durch die linearen Störungen $h_{\mu\nu}$ beschrieben werden. Für das Gravitationsfeld $\overline{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}h^\alpha_\alpha \eta_{\mu\nu}$ kann eine freie Wellengleichung abgeleitet werden:

$$\Box \overline{h}_{\mu\nu} = 0. \tag{1}$$

## Aufgabe 1 (10 Punkte): *Testteilchen in Gravitationswelle*

Bei der Linearisierung der Feldgleichungen besteht ein Eich-Freiheitsgrad $\overline{h}'_{\mu\nu} = \overline{h}_{\mu\nu} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu} + \eta_{\mu\nu}\xi^\alpha_{,\alpha}$ durch die Koordinatentransformation $(x^\mu)' = x^\mu + \xi^\mu$. Sei

$$\overline{h}_{\mu\nu} = A_{\mu\nu}\cos(k_\alpha x^\alpha) \tag{2}$$

eine monochromatische ebene Welle, die die Wellengleichung (1) löst. $A_{\mu\nu}$ ist ein konstanter Tensor.

1. Eine mögliche Wahl der Eichung ist die sogenannte transversal-spurfreie Eichung, für die bei einer ebenen Welle (2) $A_{\mu\nu}u^\nu = 0$ und $A^\nu{}_\nu = 0$ gilt, wobei $u^\mu$ die Vierergeschwindigkeit bezeichnet. Berechnen sie die Koordinatentransformation $\xi^\mu = C^\mu \sin(k_\alpha x^\alpha)$, die von einem beliebigen Koordinatensystem in das transversal spurfreie System transformiert für das mitbewegte Bezugssystem $u^\alpha = (1,0,0,0)$, indem sie die Konstanten $C^\mu$ bestimmen.

2. Berechnen sie die Komponenten $R_{j0k0}$ des Krümmungstensors in der transversal-spurfreien Eichung. Hier reicht die erste Ordnung.

3. Nun soll die Wirkung einer Gravitationswelle auf ein Testteilchen untersucht werden (auch das natürlich nur in erster Ordnung). Die Bewegung zweier Teilchen im Gravitationsfeld wird durch die Gleichung der geodätischen Abweichung beschrieben:

   $$\frac{D^2 N^\alpha}{d\tau^2} = R^\alpha{}_{\sigma\kappa\lambda} u^\sigma N^\kappa u^\lambda,$$

   wobei $N^\alpha$ der Abstandsvektor zwischen den Teilchen ist. Vereinfachen Sie diese Gleichung, indem Sie als Koordinatensystem das mitbewegte System eines Teilchens wählen. Unter der Annahme, dass sich die beiden Teilchen zum Zeitpunkt $t = 0$ in Ruhe befinden, lässt sich die erhaltene Differentialgleichung integrieren. Diskutieren sie das Ergebnis, wenn Sie nun das Teilergebnis aus 2. einsetzen.