Technische Universität Berlin
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. H.-H. v. Borzeszkowski
Dr. T. Chrobok

5. Januar 2010

9. Übungsblatt zur Allgemeinen Relativitätstheorie II

Abgabe: Dienstag 19.01.10 vor der Übung

Aufgabe 1 (10 Punkte): *Die Schwarzschild-Vakuole*

Das kosmologische Prinzip geht auch davon aus, dass die Massendichte auf kosmischen Skalen räumlich konstant ist. Im Gegensatz dazu stellen jedoch die beobachtbaren Himmelsobjekte (Sterne, Galaxien, Galaxienhaufen) große Inhomogenitäten in der Dichteverteilung dar.

In dieser Übung soll untersucht werden, ob und wie sich diese beiden Konzepte zueinander verhalten und zu welchen Aussagen dies führt. Dazu wird die Einbettung einer kugelsymmetrischen Lösung (die äußere Schwarzschild-Metrik)

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \tag{1}$$

in einem Friedmann-Kosmos (mit inkohärenter Materie, $p = 0$) mit der Robertson-Walker-Metrik

$$ds^2 = c^2 dt^2 - S^2(t) \left(\frac{d\rho^2}{1 - \epsilon\rho^2} + \rho^2 d\Omega\right) \tag{2}$$

untersucht. Hierin bezeichnet $d\Omega$ das Raumwinkelelement, sonst gelten die üblichen Abkürzungen. Es gilt folgendes Einheitensystem: $S(t) = S = [m]$, ρ und ϵ dimensionslos, $\varrho_M = [kg/m^3]$, $\kappa = 8\pi G/c^2$.

Offensichtlich sind die in den Metriken (1) und (2) benutzten Koordinaten unterschiedlich, so dass sie zunächst in eine vergleichbare Form gebracht werden müsssen. Hierzu die erste Aufgabe:

(i) Durch Lösung der Einsteinschen Feldgleichungen mit dem Ansatz der Robertson-Walker-Metrik (2) erhält man im betrachteten Fall die Friedmanngleichung

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 + \epsilon = \frac{\kappa A}{S} \tag{3}$$

mit der Konstanten $A = \varrho_M S^3/3$, die die Evolution der Metrik (2) beschreibt. Eleminieren Sie mit Hilfe der Friedmann-Gleichung (3) die Zeitkoordinate in der Metrik (2). Dies entspricht dem Koordinatensystem eines Beobachters, der sich mit den expandierenden kosmischen Koordinaten mitbewegt.

(ii) Setzen Sie in das Ergebnis die allgemeine Koordinatentransformation $S(r, R)$ und $\rho(S, r) = r/S(r, R)$ ein. Zeigen Sie, dass für die Transformationen von S die Bedingungen

$$\frac{\partial S}{\partial R} \neq 0$$
$$\frac{\partial S}{\partial r} = \frac{rS(rA - \epsilon S)}{r^2\kappa A - S^3} \tag{4}$$

gelten, wenn man R als Zeitkoordinate interpretieren will und die Nichtdiagonalelemente verschwinden sollen um einen formalen Einklang mit der Schwarzschildmetrik herzustellen.

(iii) Berechnen Sie die g_{rr}-Komponente der Metrik mit Hilfe der Bedingung (4). Vergleichen Sie das Ergebnis mit der entsprechenden Komponente der Schwarzschildmetrik und stellen Sie eine Bedingung zwischen der Schwarzschildmasse M und S bzw. ϱ_M an einem bestimmten Radius r_0 auf (Anschlußbedingung). Diskutieren Sie dieses Ergebnis bezüglich der Schwarzschildkoordinate r_0 bzw. der Koordinate ρ_0 im Friedmann-Robertson-Walker-Kosmos. Was bedeutet dies insbesondere für diese Größen im Laufe der Zeit?

(iv) Bestimmen Sie den Radius r_0 für eine mittlere kosmische Massendichte $\varrho_M = 3.7 \cdot 10^{-28} kg/m^3$ und die Massen $m_\odot = 2 \cdot 10^{30}$kg (Sonnenmasse), $m_G = 5 \cdot 10^{10} m_\odot$ (Galaxienmasse) und $m_H = 10^{14} m_\odot$ (Masse eines Galaxienhaufens). Diskutieren Sie die Ergebnisse im Vergleich zu den typischen Ausdehnungen der Massenverteilungen.