Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik

Prof. Dr. Holger Stark,
Dr. Vasily Zaburdaev,
Andreas Zöttl

15. Oktober 2009

1. Übungsblatt – Statistische Physik des Nichtgleichgewichts

Abgabe: Do. 22.10.2009 im Tutorium

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Bitte das Tutorium und die Matrikelnummer auf dem Aufgabenzettel angeben! Die Abgabe soll in Zweiergruppen erfolgen.

Aufgabe 1 (5 Punkte): *Vektoren und Tensoren*

1. Beweisen Sie die folgenden Identitäten

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) &= \mathbf{b}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})-\mathbf{c}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\\
(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{a} &= \frac{1}{2}\nabla\mathbf{a}^2-\mathbf{a}\times\mathrm{rot}\mathbf{a}\\
\mathrm{div}(\Phi\mathbf{a}) &= \mathrm{grad}\Phi\cdot\mathbf{a}+\Phi\,\mathrm{div}\mathbf{a}\\
\mathrm{rot}(\Phi\mathbf{a}) &= \mathrm{grad}\Phi\times\mathbf{a}+\Phi\,\mathrm{rot}\mathbf{a}\\
\mathrm{div}(\,\mathrm{grad}\Phi\times\,\mathrm{grad}\Psi) &= 0,
\end{aligned}$$

   wobei $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ Vektoren und Φ und Ψ Skalare sind.

2. Zeigen Sie: Für einen Tensor $\mathbf{T}$ zweiter Stufe und einen Vektor $\mathbf{a}$ gilt:

$$\mathrm{div}(\mathbf{T}^T\mathbf{a})=\mathrm{div}\mathbf{T}\cdot\mathbf{a}+(\mathbf{T}\,\mathrm{grad})\cdot\mathbf{a}.$$

   Hinweis: Die Divergenz eines Tensors zweiter Stufe ist ein Vektor mit den Komponenten $(\mathrm{div}\mathbf{T})_i=\sum_j\partial_jT_{ij}$.

3. Gegeben sei ein Vektorfeld $\mathbf{u}$. Zerlegen Sie dessen Gradienten in einen symmetrischen Anteil $\mathbf{S}$ und in einen antisymmetrischen Anteil $\mathbf{A}$ und zeigen Sie, daß für jeden Vektor $\mathbf{v}$ gilt:

$$\mathbf{A}\mathbf{v}=(\frac{1}{2}\mathrm{rot}\mathbf{u})\times\mathbf{v}.$$

   Hinweis: Der Gradient eines Vektorfeldes ist eine Matrix mit den Komponenten $(\,\mathrm{grad}\mathbf{u})_{ij}=u_{i,j}$.

Aufgabe 2 (7 Punkte): *Divergenz und Rotation in Kugelkoordinaten*

Die Punkte P des Raumes seien durch die krummlinigen Koordinaten (q_1,q_2,q_3) beschrieben. Zur Darstellung von Vektoren am Ort P bietet sich eine lokale Basis aus Einheitsvektoren $\mathbf{e}_i$ an, die Tangentialvektoren der Koordinatenlinien sind:

$$\mathbf{e}_i=\frac{1}{h_i}\frac{\partial P}{\partial q_i}\quad\mathrm{mit}\ h_i=\left|\frac{\partial P}{\partial q_i}\right|\quad.$$

Zur Berechnung der $\mathbf{e}_i$ verwendet man z. B. kartesische Koordinaten (x_1,x_2,x_3) für den Punkt P, die nach den krummlinigen Koordinaten q_i parametrisiert sind.

1. Der Gradient $\nabla\Phi$ einer skalaren Funktion $\Phi(P)$ ist über $\mathrm{d}\Phi=\nabla\Phi\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}$ definiert. Zeigen Sie, daß für die Komponenten des Gradienten bezüglich der Basisvektoren $\mathbf{e}_i$ gilt:

$$\nabla_i=\frac{1}{h_i}\frac{\partial}{\partial q_i}.$$

Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik

Prof. Dr. Holger Stark,
Dr. Vasily Zaburdaev,
Andreas Zöttl

15. Oktober 2009

2. Leiten Sie die folgende Darstellung von Divergenz und Rotation her.

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}\mathbf{a} &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(h_2 h_3 a_1) + \frac{\partial}{\partial q_2}(h_3 h_1 a_2) + \frac{\partial}{\partial q_3}(h_1 h_2 a_3)\right] \\
(\mathrm{rot}\mathbf{a})_i &= \frac{1}{h_j h_k}\epsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial q_j}(h_k a_{q_k})
\end{aligned}$$

3. Berechnen Sie Gradient, Divergenz und Rotation in Kugelkoordinaten (r,θ,ϕ).

Aufgabe 3 (8 Punkte): *Tensoren*

1. Beweisen Sie die folgenden Identitäten für die Tensoren $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$

$$\begin{aligned}
\mathbf{Aa}\cdot\mathbf{Aa} &= (\mathbf{A}^T\mathbf{Aa})\cdot\mathbf{a} \\
(\mathbf{AB})^T &= \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T \\
(\mathbf{AB})^{-1} &= \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}
\end{aligned}$$

   wobei $\mathbf{a}$ ein Vektor ist.

2. Im Zusammenhang mit der Tensorrechnung wird häufig das dyadische Produkt gebraucht. So kann ein Tensor $\mathbf{A}$ dargestellt werden als:

$$\mathbf{A} = A_{ij}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j.$$

3. Gegeben seien zwei linear unabhängige Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ des R^3. Wie lauten die Eigenvektoren des dyadischen Produkts $\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}$?. Was bedeutet damit anschaulich das dyadische Produkt? Was können Sie über die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $\mathbf{M} = \mathbf{a}\otimes\mathbf{b} + \mathbf{b}\otimes\mathbf{a}$ aussagen?

4. Betrachten Sie das dyadische Produkt $\mathbf{n}\otimes\mathbf{n}$, wobei $\mathbf{n}$ ein Einheitsvektor ist. Wie lautet die Spur dieser Matrix? Was gilt hier für die Eigenwerte und Eigenvektoren? Wie ist die Wirkung von $\mathbf{n}\otimes\mathbf{n}$ auf einen Vektor $\mathbf{v}$? Berechnen Sie $(\mathbf{n}\otimes\mathbf{n})^k\,\mathbf{v}$, wobei $k \in N$ ist. Interpretieren Sie das Ergebnis.

5. Was beschreibt der folgende Ausdruck

$$(\mathbf{u}\otimes\mathbf{u})\mathbf{v} = 0$$

   wobei $\mathbf{u}$ und $\mathbf{v} \in R^3$ sind?

Vorlesung:
- Dienstags 10:00 Uhr – 12:00 Uhr im EW 203.
- Donnerstags 14:00 Uhr – 16:00 Uhr im EW 202.

Tutorien:
- Do. 12–14 Uhr im EW 731

Scheinkriterien:
- Mindestens 50% der Übungspunkte.
- Regelmäßige und aktive Teilnahme in den Tutorien inkl. einmal Vorrechnen.

Sprechzeiten:

Name	**Tag**	**Zeit**	**Raum**
Prof. Dr. H. Stark	Fr.	11:30–12:30 Uhr	EW 709
Dr. V. Zaburdaev	Mi.	11:00–12:00 Uhr	EW 708