Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik

Prof. Dr. Holger Stark,
Andreas Zöttl,
Christoph Speier,
Christopher Wollin

28. Januar 2010

13. Übungsblatt – Statistische Physik des Nichtgleichgewichts

Abgabe: Do. 04.02.2010 im Tutorium

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Bitte das Tutorium und die Matrikelnummer auf dem Aufgabenzettel angeben! Die Abgabe soll in Zweiergruppen erfolgen.

Aufgabe 35 (7 Punkte): *Einstein Diffusion*

Die Fokker-Planck Gleichung für die Wahrscheinlichkeitsdichte $p(\mathbf{r}, t)$ eines Brownschen Teilchens in einer viskosen Flüssigkeit lautet

$$\frac{\partial}{\partial t} p(\mathbf{r}, t) = D\nabla^2 p(\mathbf{r}, t). \tag{1}$$

Diese *Einsteinsche Diffusionsgleichung* mit Diffusionskonstante D besitzt in N Dimensionen die Greensche Funktion für ein unendliches Volumen (vgl. Aufgabe 16)

$$G(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, t - t_0) = \frac{1}{(4\pi D(t - t_0))^{N/2}} \exp\left[-\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)^2}{4D(t - t_0)}\right]. \tag{2}$$

Bestimmen Sie für den eindimensionalen Fall $p(x, t)$ unter der Annahme, dass sich das Teilchen mit Sicherheit zur Zeit t_0 am Ort $x_0 > 0$ aufhielt, für $t > t_0$. Dabei sollen zwei Fälle unterschieden werden:

1. Reflektierende Randbedingungen:
   Der Transport des Teilchens ist durch eine reflektierende Wand auf den Halbraum $x > 0$ beschränkt. Dabei sollen die Randbedingungen $\partial_x p(x = 0, t)$=0 und $p(x \to \infty, t)$=0 gelten.
2. Absorbierende Randbedingungen:
   Das Teilchen verschwindet aus dem Halbraum, sobald es die Wand bei $x = 0$ erreicht und kann nicht mehr zurückkehren. Damit ergeben sich die Randbedingungen $p(x = 0, t)$=0 und $p(x \to \infty, t)$=0.

Hinweis: Verwenden Sie die Spiegel-Methode.

Bonus (4 Punkte): Zeigen Sie, dass die Teilchen-Anzahl im Fall 2. nicht mehr erhalten ist, sondern durch

$$N(t) = \text{erf}\left[\frac{x_0}{\sqrt{4D(t - t0)}}\right] \tag{3}$$

gegeben ist, wobei erf$(\cdot)$ die Fehlerfunktion ist.

Aufgabe 36 (6 Punkte): *Zeitskalen der Brownschen Bewegung*

1. Berechnen Sie eine allgemeine Lösung für die Geschwindigkeit $\dot{x}(t) = v(t)$ der eindimensionalen Langevingleichung

$$m\ddot{x}(t) = -\gamma\dot{x}(t) + \Gamma(t)\ , \tag{4}$$

mit der Anfangsbedingung $v(0) = v_0$. Die Partikulärlösung der Inhomogenität ist dabei durch

$$v_{\text{inhom}} = \frac{1}{m}\int_0^t dt' \;\; \Gamma(t')\; e^{-\frac{\gamma}{m}(t-t')} \tag{5}$$

gegeben.

2. Berechnen Sie auch eine allgemeine Lösung für den Ort, wenn das Probeteilchen bei r_0 startet. Nutzen Sie dafür

$$\int_0^t dt'' \int_0^{t''} dt' \;\; \Gamma(t')\; e^{-\frac{\gamma}{m}(t''-t')} = \frac{m}{\gamma}\int_0^t dt' \;\; \Gamma(t') \left(1 - e^{-\frac{\gamma}{m}(t-t')}\right) \; . \tag{6}$$

3. Berechnen Sie die zeitliche Entwicklung der mittleren quadratischen Abweichung des Ortes $\left\langle (x(t)-x_0)^2 \right\rangle$, skizzieren Sie diese und betrachten Sie die Grenzfälle

   (a) $t \gg \frac{m}{\gamma}$,

   (b) $t \ll \frac{m}{\gamma}$.

   Verwenden Sie

$$\langle \Gamma(t) \rangle = 0 \tag{7}$$

$$\left\langle \Gamma(t)\Gamma(t') \right\rangle = 2\gamma k_B T \; \delta(t-t') \; . \tag{8}$$

4. (a) Wie lässt sich dieses Verhalten (nach einem kurzen bzw. langen Zeitraum) physikalisch erklären? Gehen Sie in ihrer Antwort (in zwei Sätzen!) auf die mikroskopischen Vorgänge ein, die in der Brownschen Dynamik relevant sind.

   (b) Was ist in der mathematischen Beschreibung der wesentliche Unterschied zwischen einer Brownschen und ballistischen Bewegung? Berechnen Sie zur Beantwortung dieser Frage (in einem Satz!) die mittlere quadratische Abweichung des Ortes eines gleichförmig bewegten Massepunktes.

Aufgabe 37 (7 Punkte): *Matrixzerlegung*
Zerlegen Sie die Matrix

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 36 & 33 \\ 6 & 229 & 99 & 397 \\ 36 & 99 & 530 & 618 \\ 33 & 397 & 618 & 1468 \end{pmatrix} \tag{9}$$

in die Dreiecksmatrizen $\mathbf{D}$ und $\mathbf{D}^T$, die die Form $\mathbf{M} = \mathbf{D}\mathbf{D}^T$ erfüllen. Verwenden sie hierzu folgende rekursive Bestimmungsgleichung für die Matrix.

$$D_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{für } i < j \\ \sqrt{M_{ii} - \sum\limits_{k=1}^{i-1} D_{ik}^2} & \text{für } i = j \\ \frac{1}{D_{jj}} \left(M_{ij} - \sum\limits_{k=1}^{j-1} D_{ik} D_{jk} \right) & \text{für } i > j \end{cases} \tag{10}$$

Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik

Prof. Dr. Holger Stark,
Andreas Zöttl,
Christoph Speier,
Christopher Wollin

28. Januar 2010

1. Berechnen Sie die untere Dreiecksmatrix $\mathbf{D}$, die dieser Form genügt.
2. Ersetzen Sie die Einträge der erhaltenen Matrix mit dem jeweiligen Buchstaben des Alphabets (A=1, B=2,...) und finden Sie den Namen des Mathematikers nach dem die Zerlegung benannt ist.

Vorlesung:	• Dienstags 10:00 Uhr – 12:00 Uhr im EW 203. • Donnerstags 14:00 Uhr – 16:00 Uhr im EW 202.
Tutorien:	• Do. 12–14 Uhr im EW 731
Scheinkriterien:	• Mindestens 50% der Übungspunkte. • Regelmäßige und aktive Teilnahme in den Tutorien inkl. einmal Vorrechnen.

Sprechzeiten:

Name	Tag	Zeit	Raum
Prof. Dr. H. Stark	Fr.	11:30–12:30 Uhr	EW 709
Andreas Zöttl	Mi.	11:00–12:00 Uhr	EW 702