

3. Übungsblatt – Statistische Physik des Nichtgleichgewichts**Abgabe: Do. 05.11.2009 im Tutorium**

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Bitte das Tutorium und die Matrikelnummer auf dem Aufgabenzettel angeben! Die Abgabe soll in Zweiergruppen erfolgen.

Aufgabe 7 (8 Punkte): Vortices

It can be shown that the vorticity of an ideal fluid (no friction) obeys the following equation:

$$(1) \quad \frac{\partial \text{rot} \mathbf{v}}{\partial t} = \text{rot} [\mathbf{v} \times \text{rot} \mathbf{v}]$$

In this problem we will be interested in the case of the 2-dimensional incompressible fluid. The incompressibility implies that $\text{div} \mathbf{v} = 0$. It allows to represent the velocity field as follows:

$$(2) \quad \mathbf{v} = \text{rot} (\Phi(x, y, t) \mathbf{e}_z),$$

where $\Phi(x, y)$ is a flow function.

1. By substituting Eq. (2) into the equation for vorticity Eq. (1) derive the equation for the flow function Φ .
2. Now we are looking for the stationary ($\Phi(x, y, t) \equiv \Phi(x, y) \equiv \Phi(|\mathbf{r}|)$) vortex-type solution of the equation derived in the previous part. We will consider two important cases:
 - a) Irrotational vortex: a vortex with zero vorticity: $\text{rot} \mathbf{v} = 0$. In this case the vorticity equation is satisfied automatically and the flow function is found from $\Delta \Phi = 0$ (for $x, y \neq 0$). Solve this equation and find $\Phi(|\mathbf{r}|)$.
 - b) Rotational vortex: a vortex with constant vorticity: $|\text{rot} \mathbf{v}| = 2\omega$. Find the corresponding flow function $\Phi(|\mathbf{r}|)$ and check if it satisfies the equation of part 1 of this problem.
3. Calculate the deformation rate \mathbf{A} and the tensor of angular velocity \mathbf{W} and explain what is the qualitative difference of the above two vortex flows.

Aufgabe 8 (8 Punkte): Kontinuitätsgleichungen

In der Vorlesung wurden die Bilanzgleichungen für Masse, Impuls und Energie mechanischer Systeme hergeleitet. Damit lassen sich auch Kontinuitätsgleichungen weiterer Erhaltungsgrößen herleiten.

1. Leiten Sie aus den Maxwellgleichungen ohne Materie die Kontinuitätsgleichung der Ladungsdichte her.
Benutzen Sie nun das Vorgehen der Vorlesung für eine alternative Herleitung.
2. Die Energiedichte des freien elektromagnetischen Feldes lautet in SI-Einheiten $u = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2$.
Wie lauten die dazugehörigen Bilanzgleichungen, die Sie mit Hilfe der homogenen Maxwellgleichungen bzw. mit dem Vorgehen der Vorlesung gewinnen? Zeigen Sie die Äquivalenz beider Gleichungen, indem Sie explizit ebene elektromagnetische Wellen annehmen.
3. Wie lautet die Kontinuitätsgleichung der Quantenmechanik und welche Erhaltungsgröße spielt hierbei eine Rolle?

4. Wie sieht die lokale Bilanzgleichung für die mechanische Impulsdichte $p = \rho \mathbf{v}$ aus? Interpretieren Sie die dabei auftretenden Terme.

Aufgabe 9 (4 Punkte): *Deformation und Drehung*

Gegeben sei das folgende Geschwindigkeitsfeld in \mathbb{R}^2 ($\gamma > 0$):

$$\mathbf{v}(x, y) = \begin{pmatrix} \gamma y \\ 0 \end{pmatrix}$$

1. Skizzieren Sie das Geschwindigkeitsfeld.
2. Berechnen Sie Verzerrungsgeschwindigkeitstensor \mathbf{A} und Drehgeschwindigkeitstensor \mathbf{W} . Finden Sie eine geeignete Basis, in der \mathbf{A} diagonal wird und interpretieren Sie die Eigenwerte.
3. Finden und skizzieren Sie ein Geschwindigkeitsfeld, welches folgende Bedingungen erfüllt:
 - \mathbf{A} wie in Aufgabe 2.
 - $\mathbf{W} = 0$
4. Finden und skizzieren Sie ein Geschwindigkeitsfeld, welches folgende Bedingungen erfüllt:
 - \mathbf{W} wie in Aufgabe 2.
 - $\mathbf{A} = 0$

Vorlesung:

- Dienstags 10:00 Uhr – 12:00 Uhr im EW 203.
- Donnerstags 14:00 Uhr – 16:00 Uhr im EW 202.

Tutorien:

- Do. 12–14 Uhr im EW 731

Scheinkriterien:

- Mindestens 50% der Übungspunkte.
- Regelmäßige und aktive Teilnahme in den Tutorien inkl. einmal Vorrechnen.

Sprechzeiten:

Name	Tag	Zeit	Raum
Prof. Dr. H. Stark	Fr.	11:30–12:30 Uhr	EW 709
Dr. V. Zaburdaev	Mi.	11:00–12:00 Uhr	EW 708
Andreas Zöttl	Mi.	11:00–12:00 Uhr	EW 702