Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik

Prof. Dr. Holger Stark,
Dr. Vasily Zaburdaev,
Andreas Zöttl

9. November 2009

5. Übungsblatt – Statistische Physik des Nichtgleichgewichts

Abgabe: Do. 19.11.2009 im Tutorium

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Bitte das Tutorium und die Matrikelnummer auf dem Aufgabenzettel angeben! Die Abgabe soll in Zweiergruppen erfolgen.

Aufgabe 13 (7 Punkte): *Poiseuille Strömung*

Eine wichtige Anwendung der Navier-Stokes-Gleichungen ist die Strömung einer Flüssigkeit durch ein zylindrisches Rohr mit Radius R und Länge L. Wir wollen uns auf den Spezialfall einer laminaren, inkompressiblen, stationären Newtonschen Flüssigkeit mit Viskosität η beschränken. Zusätzlich sollen Gravitatskraft und andere externe Kräfte vernachlässigt werden.

1. Lösen Sie die Navier-Stokes-Gleichungen mit den oben angegebenen Voraussetzungen, und bestimmen Sie Druck- und Geschwindigkeitsfeld. Verwenden Sie haftende Randbedingungen. *Hinweis:* Beachten Sie, dass das Geschwindigkeitsfeld einer realen Flüssigkeit an keinem Ort divergieren darf!

2. Berechnen Sie die Ausflussmenge Q pro Zeiteinheit (*Hagen-Poiseuillesches Gesetz*):

$$Q = \int_{\partial V} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{f} = \frac{\Delta V}{\Delta t}. \tag{1}$$

Aufgabe 14 (6 Punkte): *Zirkulare Couette-Strömung*
Im folgenden wollen wir eine Flüssigkeit zwischen zwei koaxialen, unendlich langen Zylindern mit Radien R_1, R_2 betrachten, wobei $R_1 < R_2$. Die beiden Zylinder rotieren dabei mit den Winkelgeschwindigkeiten ω_1 und ω_2 um ihre ortsfesten Achsen. Wir suchen wiederum die Druck- und Geschwindigkeitsfelder der Strömung zwischen den Zylindern.

1. Berechnen Sie ganz allgemein das Geschwindigkeits- und Druckfeld der Flüssigkeit aus den Navier-Stokes-Gleichungen. Gehen Sie wieder von einer laminaren, stationären, inkompressiblen Strömung und haftenden Randbedingungen aus und vernachlässigen Sie die Gravitation.

2. Vergleichen Sie das Ergebnis für $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ mit den Ergebnissen aus Aufgabe 7.2 aus der vorletzten Übung. Betrachten Sie die Spezialfälle a) $\omega_1 = \omega_2$ und b) $R_2 \to \infty$, $\omega_2 \to 0$.

Aufgabe 15 (7 Punkte): *Burgers' equation*
One of the important models of hydrodynamics is the model of the pressureless gas dynamics which can be described by a system of two conservation laws for density and momentum:

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0 \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

One of the applications of this model is the description of the mass agglomeration in the universe.

1. Show that the above system of equations can be reduced to the Hopf (inviscid Burgers') equation for the velocity u (see Aufgabe 6).

2. As was discussed previously the Hopf equation lead to the discontinuous solution in a finite time. The way to get around this difficulty is to take into account the viscosity of the fluid ν. In this case the velocity satisfies Burgers' equation:

$$\partial_t u + u \partial_x u = \nu \partial_{xx}^2 u \tag{3}$$

Prof. Dr. Holger Stark,
Dr. Vasily Zaburdaev,
Andreas Zöttl

9. November 2009

The Hopf equation corresponds to the inviscid limit of the above equation, i.e. $\nu \to 0$. Burgers' equation is one of the fundamental equations describing a variety of processes such as gas dynamics, turbulence, and traffic flows. Its particular feature is that it is a hidden linear equation. By using the Hopf-Cole substitution $u = -2\nu\partial_x \ln \phi$ show that the Burgers' equation is reduced to the diffusion equation for ϕ.

Vorlesung:	• Dienstags 10:00 Uhr – 12:00 Uhr im EW 203.			
	• Donnerstags 14:00 Uhr – 16:00 Uhr im EW 202.			
Tutorien:	• Do. 12–14 Uhr im EW 731			
Scheinkriterien:	• Mindestens 50% der Übungspunkte.			
	• Regelmäßige und aktive Teilnahme in den Tutorien inkl. einmal Vorrechnen.			
Sprechzeiten:	**Name**	**Tag**	**Zeit**	**Raum**
	Prof. Dr. H. Stark	Fr.	11:30–12:30 Uhr	EW 709
	Dr. V. Zaburdaev	Mi.	11:00–12:00 Uhr	EW 708
	Andreas Zöttl	Mi.	11:00–12:00 Uhr	EW 702