Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik

Prof. Dr. Holger Stark,
Dr. Vasily Zaburdaev,
Andreas Zöttl

16. November 2009

6. Übungsblatt – Statistische Physik des Nichtgleichgewichts

Abgabe: Do. 26.11.2009 im Tutorium

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Bitte das Tutorium und die Matrikelnummer auf dem Aufgabenzettel angeben! Die Abgabe soll in Zweiergruppen erfolgen.

Aufgabe 16 (13 Punkte): *Diffusionsgleichung für Wirbel*

Die Diffusionsgleichung für Wirbel ist gegeben durch

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - D\nabla^2\right) \mathsf{rot}\,\mathbf{v} = \mathsf{rot}\,\mathbf{b} \tag{1}$$

mit der Diffusionskonstante $D = \eta/\rho_0$.

1. Nehmen Sie nun an, dass eine Störung am Punkt $\mathbf{x}_0$ und zur Zeit $t = 0$ in die Richtung $\mathbf{n}$ wirkt, so dass

   $$\left(\frac{\partial}{\partial t} - D\nabla^2\right) \mathrm{rot}\,v = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\delta(t) \tag{2}$$

   und $\mathrm{rot}v = G(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0, t)$ mit $\mathrm{rot}\,v = \mathbf{n}\cdot\mathrm{rot}\,\mathbf{v}(\mathbf{x},t)$. Berechnen Sie die Greensche Funktion $G(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0,t)$.
   Hinweis: Verwenden Sie

   $$\int d\mathbf{k}\,d\omega\,\frac{e^{i(\mathbf{kx}-\omega t)}}{-i\omega + Dk^2} = \frac{2\pi^{5/2}}{(Dt)^{3/2}}\exp[-\frac{\mathbf{x}^2}{4Dt}]. \tag{3}$$

2. Nehmen Sie nun eine Punktstörung in z-Richtung an, so dass $\mathrm{rot}\,\mathbf{v} = (\mathrm{rot}\,v)\mathbf{e}_z$. Berechnen Sie $\mathbf{v}(\mathbf{x},t)$ für $t > 0$.
   Hinweis: Verwenden Sie Zylinderkoordinaten (ρ,ϕ,z), setzen Sie $\mathbf{v} = v(\rho,z,t)\mathbf{e}_\phi$ und lösen Sie $\mathrm{rot}\,v(\rho,z,t) = G(\rho,z,t)$.

3. Beweisen Sie

   $$\langle(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)^2\rangle = \int(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)^2 G(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0,t)\,d^3x = 6Dt, \tag{4}$$

   mittels partieller Integration.
   Hinweis: Verwenden Sie:

   $$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/c^2}\,dy = \sqrt{\pi}|c|. \tag{5}$$

Aufgabe 17 (7 Punkte): *Fundamentalsatz der Vektoranalysis*

Der Fundamentalsatz der Vektoranalysis oder Zerlegungssatz

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi}\mathrm{rot}_r \int \mathrm{d}^3r'\,\frac{\mathrm{rot}_{r'}\mathbf{v}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} - \frac{1}{4\pi}\mathrm{grad}_r \int \mathrm{d}^3r'\,\frac{\mathrm{div}_{r'}\mathbf{v}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \tag{6}$$

besagt, dass ein Vektorfeld durch seine Wirbel $\mathrm{rot}\,\mathbf{v}(\mathbf{r})$ mit einem Vektorpotential und seine Quellen $\mathrm{div}\,\mathbf{v}(\mathbf{r})$ mit einem skalaren Potential dargestellt werden kann. Die Indizes r bzw. r' der

Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik

Prof. Dr. Holger Stark,
Dr. Vasily Zaburdaev,
Andreas Zöttl

16. November 2009

Differentialoperatoren geben an auf welche Koordinaten sie wirken.

Nehmen Sie an, dass das Vektorfeld $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ und seine Ableitungen für $|\mathbf{r}| \to \infty$ hinreichend schnell verschwinden.

1. Zeigen Sie zunächst mithilfe der partiellen Integration, dass die Beziehungen

$$\mathrm{rot}_r \int \mathrm{d}^3 r' \frac{\mathrm{rot}_{r'} \mathbf{v}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \int \mathrm{d}^3 r' \frac{\mathrm{rot}_{r'} \mathrm{rot}_{r'} \mathbf{v}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \tag{7}$$

   und

$$\mathrm{grad}_r \int \mathrm{d}^3 r' \frac{\mathrm{div}_{r'} \mathbf{v}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \int \mathrm{d}^3 r' \frac{\mathrm{grad}_{r'} \mathrm{div}_{r'} \mathbf{v}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \tag{8}$$

   gelten.

2. Beweisen Sie den Zerlegungssatz für die oben genannten Annahmen.

Vorlesung:
- Dienstags 10:00 Uhr – 12:00 Uhr im EW 203.
- Donnerstags 14:00 Uhr – 16:00 Uhr im EW 202.

Tutorien:
- Do. 12–14 Uhr im EW 731

Scheinkriterien:
- Mindestens 50% der Übungspunkte.
- Regelmäßige und aktive Teilnahme in den Tutorien inkl. einmal Vorrechnen.

Sprechzeiten:

Name	Tag	Zeit	Raum
Prof. Dr. H. Stark	Fr.	11:30–12:30 Uhr	EW 709
Dr. V. Zaburdaev	Mi.	11:00–12:00 Uhr	EW 708
Andreas Zöttl	Mi.	11:00–12:00 Uhr	EW 702