

**7. Übungsblatt – Statistische Physik des Nichtgleichgewichts**

**Abgabe: Do. 03.12.2009 im Tutorium**

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Bitte das Tutorium und die Matrikelnummer auf dem Aufgabenzettel angeben! Die Abgabe soll in Zweiergruppen erfolgen.

**Aufgabe 18 (7 Punkte): Hydrodynamische Moden**

Zur Beschreibung der drei hydrodynamischen Longitudinalmoden ( $\xi_3, \xi_4, \xi_5$ ) wird die dynamische Matrix  $\mathcal{D}$  (siehe Gl. 3.111 vom Vorlesungsskript) verwendet, aus der die Dispersionsrelationen  $\xi_i(k)$  bestimmt werden können.

1. Zeigen Sie, dass sich für eine dissipationsfreie Flüssigkeit mit  $\mathcal{D}_0 = \mathcal{D}(\eta = \eta' = \kappa = 0)$  die Relationen  $\xi_3^0 = ick$ ,  $\xi_4^0 = -ick$  und  $\xi_5^0 = 0$  ergeben, wobei

$$(1) \quad c = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s} = \frac{1}{\sqrt{\rho \kappa_s}},$$

indem Sie die charakteristische Gleichung  $\det \mathcal{D}_0 = 0$  lösen.

2. Betrachten Sie nun eine dissipative Flüssigkeit mit  $\eta, \eta', \kappa \neq 0$ . Verwenden Sie den Ansatz  $\xi_{3,4} = \xi_{3,4}^0 + \frac{1}{2}\Gamma k^2$ ,  $\xi_5 = \xi_5^0 + D_T k^2$  und zeigen Sie, dass die dämpfenden Anteile durch

$$(2) \quad D_T = \frac{\kappa}{\rho c_p}, \quad \Gamma = D_T \left( \frac{c_p}{c_v} - 1 \right) + \frac{2\eta + \eta'}{\rho}$$

gegeben sind.

*Hinweis:* Vernachlässigen Sie bei der Lösung von  $\det \mathcal{D} = 0$  alle Terme ab der Ordnung  $\mathcal{O}(k^5)$ .

**Aufgabe 19 (7 Punkte): Stokesgleichung aus Variationsprinzip**

Lösungen  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$  der Stokeschen Gleichung

$$(3) \quad 0 = -\nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{v}$$

extremalisieren die Dissipationsleistung des Geschwindigkeitsfeldes

$$(4) \quad W = \int T'_{ij} A_{ij} d^3x = 2\eta \int A_{ij}^2 d^3x,$$

wenn zusätzlich gefordert wird, dass die Divergenz des Vektorfeldes verschwindet. Deshalb kann die Stokesgleichung auch durch ein Variationsverfahren gewonnen werden. Die Divergenzfreiheit geht mit dem Lagrangeparameter  $p$  als Nebenbedingung ein,

$$(5) \quad \delta \left( W - 2 \int p \operatorname{div} \mathbf{v} d^3x \right) = \delta \left( \int 2\eta A_{ij}^2 - 2p \operatorname{div} \mathbf{v} d^3x \right) = 0.$$

1. Zeigen Sie, dass das Variationsproblem (5) äquivalent zu der Stokesgleichung ist, also die Aussage

$$(6) \quad \delta \left( \int 2\eta A_{ij}^2 - 2p \operatorname{div} \mathbf{v} d^3x \right) = 0 \Leftrightarrow -\nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{v} = 0$$

gilt.

2. Welche Randbedingungen ergeben sich, wenn Sie auf der Oberfläche eine Variation zulassen ( $\delta \mathbf{v}|_{\partial V} \neq 0$ ) oder verbieten ( $\delta \mathbf{v}|_{\partial V} = 0$ )?

**Aufgabe 20 (6 Punkte): Oseentensor**

Die Bestimmungsgleichungen für die Greenschen Funktionen der Creeping-Flow-Gleichungen lauten

$$(7) \quad \text{grad } \mathbf{g}(\mathbf{x}) - \eta \nabla^2 \mathbf{O}(\mathbf{x}) = \mathbf{1} \delta(\mathbf{x})$$

$$(8) \quad \text{div} \mathbf{O}(\mathbf{x}) = 0.$$

Bestimmen Sie die Greensche Funktion des Strömungsfeldes, den Oseen-Tensor,  $\mathbf{O}(x)$ , indem sie nach Einsetzen des Druckvektors

$$(9) \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi} \nabla \frac{1}{r}$$

in (7), den Ansatz

$$(10) \quad \mathbf{O}(x) = \frac{1}{4\pi\eta} \frac{1}{r} \left( \mathbf{1} + c_1 \mathbf{1} + c_2 \frac{\mathbf{x} \otimes \mathbf{x}}{r^2} \right)$$

verwenden und die Konstanten  $c_1$  und  $c_2$  berechnen.

*Hinweis:* Für das korrekte Bestimmen der Lösung gibt es **4 Bonuspunkte!**

<b>Vorlesung:</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Dienstags 10:00 Uhr – 12:00 Uhr im EW 203.</li> <li>• Donnerstags 14:00 Uhr – 16:00 Uhr im EW 202.</li> </ul>																
<b>Tutorien:</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Do. 12–14 Uhr im EW 731</li> </ul>																
<b>Scheinkriterien:</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Mindestens 50% der Übungspunkte.</li> <li>• Regelmäßige und aktive Teilnahme in den Tutorien inkl. einmal Vorrechnen.</li> </ul>																
<b>Sprechzeiten:</b>	<table border="1"> <thead> <tr> <th>Name</th> <th>Tag</th> <th>Zeit</th> <th>Raum</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Prof. Dr. H. Stark</td> <td>Fr.</td> <td>11:30–12:30 Uhr</td> <td>EW 709</td> </tr> <tr> <td>Dr. V. Zaburdaev</td> <td>Mi.</td> <td>11:00–12:00 Uhr</td> <td>EW 708</td> </tr> <tr> <td>Andreas Zöttl</td> <td>Mi.</td> <td>11:00–12:00 Uhr</td> <td>EW 702</td> </tr> </tbody> </table>	Name	Tag	Zeit	Raum	Prof. Dr. H. Stark	Fr.	11:30–12:30 Uhr	EW 709	Dr. V. Zaburdaev	Mi.	11:00–12:00 Uhr	EW 708	Andreas Zöttl	Mi.	11:00–12:00 Uhr	EW 702
Name	Tag	Zeit	Raum														
Prof. Dr. H. Stark	Fr.	11:30–12:30 Uhr	EW 709														
Dr. V. Zaburdaev	Mi.	11:00–12:00 Uhr	EW 708														
Andreas Zöttl	Mi.	11:00–12:00 Uhr	EW 702														