

8. Übungsblatt – Statistische Physik des Nichtgleichgewichts

Abgabe: Do. 17.12.2009 im Tutorium

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Bitte das Tutorium und die Matrikelnummer auf dem Aufgabenzettel angeben! Die Abgabe soll in Zweiergruppen erfolgen.

Aufgabe 21 (10 Punkte): Stokesches Reibungsgesetz – Geschwindigkeit

Wir suchen das Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v}(\mathbf{r})$, das um eine Kugel mit Radius R entsteht, wenn sie bei kleiner Reynoldszahl mit der Geschwindigkeit \mathbf{u} von einer Flüssigkeit angeströmt wird, d.h. $\mathbf{v}(\mathbf{r}) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \mathbf{u}$. Es gelten die Stokesgleichungen

$$(1) \quad \eta \Delta \mathbf{v} - \text{grad } p = \mathbf{0}, \quad \text{div } \mathbf{v} = 0.$$

Hierbei zerlegt man das Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ in die Summe

$$(2) \quad \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{v}'(\mathbf{r}) + \mathbf{u}.$$

Der Anteil $\mathbf{v}'(\mathbf{r})$ entspricht dem Feld, dass entstände, wenn man eine Kugel mit der Geschwindigkeit $-\mathbf{u}$ durch eine ruhende Flüssigkeit zöge.

1. Zeigen sie zunächst, dass aus den Stokesgleichungen (1),

$$(3) \quad \Delta \text{rot } \mathbf{v} = 0,$$

folgt.

2. Begründen Sie, warum das Geschwindigkeitsfeld durch die Rotation eines Vektorpotentials darstellbar ist.
3. Verwenden Sie den Ansatz $\mathbf{v}' = \text{rot}((\nabla f(r)) \times \mathbf{u})$, wobei die Funktion $f(r)$ nur vom Betrag des Ortsvektors $r = |\mathbf{r}|$ abhängt. Bestimmen Sie $f(r)$ auf folgendem Weg.

(a) Zeigen Sie, mit (3), dass $\Delta^2 f = \text{const.}$ gilt und bestimmen Sie den Wert der Konstante aus den Randbedingungen des Geschwindigkeitsfeldes.

(b) Folgern Sie aus der in (a) gezeigten Relation, dass $f(r)$ die Form,

$$(4) \quad f = ar + \frac{b}{r} + c,$$

mit den Konstanten a , b und c hat.

(c) Wählen Sie $c = 0$, und begründen Sie, warum dies möglich ist.

(d) Setzen Sie f in die Bestimmungsgleichung für \mathbf{v} ein und ermitteln Sie a und b bei haftenden Randbedingungen auf der Kugeloberfläche.

4. Stellen Sie das Geschwindigkeitsfeld \mathbf{v} in Abhängigkeit von R , $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$, \mathbf{u} und r dar. Schreiben sie die Komponenten des Felds auch in Kugelkoordinaten auf, indem Sie die Polarachse \mathbf{e}_z parallel zur Strömungsgeschwindigkeit \mathbf{u} wählen.

Aufgabe 22 (4 Punkte): Stokesches Reibungsgesetz – Druck

Bestimmen Sie den Druck $p(\mathbf{r})$ aus den Stokesgleichungen und den in Aufgabe 21 hergeleiteten Gleichungen, wobei dieser im Unendlichen $p(\mathbf{r}) \stackrel{r \rightarrow \infty}{=} p_0$ betragen soll.

Aufgabe 23 (6 Punkte): Stokesches Reibungsgesetz – Kraft

Berechnen Sie den Betrag der Kraft, die die Kugel erfährt, indem Sie den Spannungsvektor für inkompressible Flüssigkeiten, $T_{ij}n_j$, über die Kugeloberfläche integrieren. Beachten Sie dabei, dass die Kraft parallel zu \mathbf{u} wirkt, d.h. $F = \mathbf{u} \cdot \mathbf{F} / |\mathbf{u}|$. Nutzen Sie Kugelkoordinaten, wie Sie jene oben eingeführt haben.

1. Zeigen Sie dafür zunächst, dass der Kraftbetrag durch

$$(5) \quad F = \oint (T_{rr} \cos \theta - T_{r\theta} \sin \theta) dA.$$

gegeben ist. Berücksichtigen Sie dabei, dass es aus Symmetriegründen keine Kraftdichtekomponenten in Azimutalrichtung gibt.

2. Setzen Sie dann die Komponenten des Spannungstensors,

$$(6) \quad T_{rr} = -p + 2\eta \frac{\partial v_r}{\partial r}, \quad T_{r\theta} = \eta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right),$$

und die entsprechenden, oben berechneten Geschwindigkeitskomponenten ein und berechnen Sie das Integral.

3. Formulieren Sie das Stokesche Reibungsgesetz.

Vorlesung:

- Dienstags 10:00 Uhr – 12:00 Uhr im EW 203.
- Donnerstags 14:00 Uhr – 16:00 Uhr im EW 202.

Tutorien:

- Do. 12–14 Uhr im EW 731

Scheinkriterien: • Mindestens 50% der Übungspunkte.

- Regelmäßige und aktive Teilnahme in den Tutorien inkl. einmal Vorrechnen.

Sprechzeiten:

Name	Tag	Zeit	Raum
Prof. Dr. H. Stark	Fr.	11:30–12:30 Uhr	EW 709
Dr. V. Zaburdaev	Mi.	11:00–12:00 Uhr	EW 708
Andreas Zöttl	Mi.	11:00–12:00 Uhr	EW 702