

**9. Übungsblatt – Statistische Physik des Nichtgleichgewichts**

**Abgabe: Do. 07.01.2010 im Tutorium**

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Bitte das Tutorium und die Matrikelnummer auf dem Aufgabenzettel angeben! Die Abgabe soll in Zweiergruppen erfolgen.

**Aufgabe 24 (6 Punkte):** *Reibungsmatrix des langen, dünnen, steifen Stabes*

Berechnen Sie die Reibungskoeffizienten eines Stabes der Länge  $L$ , der parallel zur  $x$ -Achse ausgerichtet ist, und den man sich aus  $N$  Kugeln vom Radius  $a$  zusammengesetzt denkt, wobei  $L \gg 2a$ . Die Geschwindigkeit des  $j$ -ten Stabsegments  $\mathbf{u}(\mathbf{x}_j)$  kann man dann als Superposition seiner eignen Stokes-Geschwindigkeit und der Geschwindigkeit der Strömungen, die die übrigen Kugeln an seiner Stelle verursachen, approximieren. Nimmt man weiterhin die Strömung der übrigen Segmente als Stokeslets  $\mathbf{v}_i(\mathbf{x}_j)$  an, erhält man,

$$(1) \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}_j) = \frac{\mathbf{F}_{seg}}{6\pi\eta a} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N \mathbf{v}_i(\mathbf{x}_j),$$

mit

$$(2) \quad \mathbf{v}_i(\mathbf{x}) = \frac{1}{8\pi\eta|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|} (\mathbf{I} + \mathbf{e}_x \mathbf{e}_x) \cdot \mathbf{F}_{seg},$$

und der Kraft pro Stabsegment  $\mathbf{F}_{seg} = \mathbf{F}_{ges}/N$ .

1. Berechnen Sie  $\mathbf{u}(\mathbf{x}_j)$ , indem Sie die Summe mit Hilfe von  $N \gg 1$  in ein Integral überführen und über die gesamte Länge des Stabes (von  $-L/2$  bis  $L/2$ ) integrieren, aber das  $j$ -te Segment (der Breite  $2a$ ) "überspringen".
2. Finden sie dann einen Ausdruck für die Gesamtgeschwindigkeit des Stabes  $\mathbf{u}$ , indem Sie lediglich Terme der Ordnung  $\ln(L/a)$  berücksichtigen.
3. Wie lauten nun die Reibungskoeffizienten senkrecht und parallel zur  $x$ -Achse?

**Aufgabe 25 (7 Punkte):** *Reibungsmatrix der Helix*

Im Folgenden soll die Reibungsmatrix für einen helixförmigen Weihnachtsbaum in einer Stokeschen Flüssigkeit berechnet werden. Dabei wird angenommen, dass angreifende Kraft  $F$  und Drehmoment  $M$ , sowie Translations- und Rotationsgeschwindigkeit  $U$  und  $\Omega$  in die Richtung der Helixachse  $\mathbf{e}_z$  zeigen. Dann sind  $(F, M)$  über eine  $2 \times 2$  Reibungsmatrix linear mit  $(U, \Omega)$  verbunden,

$$\begin{pmatrix} F \\ M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & C \\ C & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ \Omega \end{pmatrix}.$$

Die Helix ist bei festem Radius  $R$  und Ganghöhe  $p$  durch den Winkel  $\phi$  parametrisiert,

$$\mathbf{x}(\phi) = \begin{pmatrix} R \cos \phi \\ R \sin \phi \\ \phi/k \end{pmatrix}, \quad k = 2\pi/p.$$

Berechnen Sie nun  $F$  und  $M$  auf eine Helix der Höhe  $p$  ( $\phi \in [0, 2\pi]$ ), indem Sie zuerst  $U$  und dann  $\Omega$  in z-Richtung annehmen. Verwenden Sie  $\mathbf{f} = (\eta_{\parallel} \mathbf{t} \otimes \mathbf{t} + \eta_{\perp} (1 - \mathbf{t} \otimes \mathbf{t})) \mathbf{v}$ , wobei  $\mathbf{t}$  der Tangentialvektor an die Helix ist, und  $\eta_{\parallel}, \eta_{\perp}$  die Reibungskoeffizienten parallel bzw. normal zum Helixsegment sind. Dabei ist  $\mathbf{v} = U \mathbf{e}_z$  (Translation) bzw.  $\mathbf{v} = \Omega \mathbf{e}_z \times R \mathbf{e}_{\rho}$  (Rotation). Aus den linearen Beziehungen können Sie nun  $\gamma, \beta$  und  $C$  ablesen.

**Aufgabe 26 (6 Punkte):** *Mittlere Geschwindigkeit des Spermiums*

Bestimmen Sie die Geschwindigkeit, die ein Spermium durch seine wellenförmige Bewegung erreicht. Verwenden Sie hierzu den Reibungstensors eines langen dünnen Stabes (siehe Aufgabe 24).

1. Nehmen Sie an, dass sich das fadenförmige Filament (mit der Länge  $L$ ) des Spermiums, gemäß einer ebenen Welle, die entgegen der Fortbewegungsrichtung propagiert, deformiert und berechnen Sie die Kraftdichte, die an einem Punkt des Filaments in Schwimmrichtung erzeugt wird.
2. Integrieren Sie die berechnete Kraftdichte über die Länge des Filaments, nehmen Sie dabei an, dass die Deformationen klein sind und zeigen Sie die Abhängigkeit der erzeugten Kraft von der Filamentlänge.
3. Berechnen Sie die mittlere Geschwindigkeit  $\langle u \rangle$ , die sich einstellt, wenn man für die Reibungskraft entgegen der Schwimmrichtung in führender Ordnung  $\xi_{\parallel} L \langle u \rangle$  berücksichtigt. Mitteln Sie dafür die berechnete Reibungskraft über eine sinnvolle Zeitspanne.

**Vorlesung:**

- Dienstags 10:00 Uhr – 12:00 Uhr im EW 203.
- Donnerstags 14:00 Uhr – 16:00 Uhr im EW 202.

**Tutorien:**

- Do. 12–14 Uhr im EW 731

**Scheinkriterien:**

- Mindestens 50% der Übungspunkte.
- Regelmäßige und aktive Teilnahme in den Tutorien inkl. einmal Vorrechnen.

**Sprechzeiten:**

Name	Tag	Zeit	Raum
Prof. Dr. H. Stark	Fr.	11:30–12:30 Uhr	EW 709
Andreas Zöttl	Mi.	11:00–12:00 Uhr	EW 702