

Prof. Dr. Eckehard Schöll, PhD und Dr. Kathy Lüdge

Dr. Clive Emary, Dipl. Phys. Stefan Fruhner, Dipl. Phys. Miriam Wegert, Dipl. Phys. Philipp Zedler

10. Übungsblatt – Theoretische Physik V: Quantenmechanik II**Abgabe: Mo. 11.01.2010 bis 18:00 Uhr, Briefkasten ER-Gebäude und mit ISIS***Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen.***Aufgabe 24 (10 Punkte): Bose-Einstein-Kondensation**

- (a) Diskutieren Sie mögliche Werte des chemischen Potentials für die Fermi-Dirac und die Bose-Einstein Statistik $f^{B/F}(\varepsilon, T, \mu)$. Plotten Sie die Verteilungen für verschiedene Temperaturen, dabei sei $\mu = \text{const.}$ Wie verändert sich die mittlere Teilchenzahl?
- (b) Betrachten Sie ein dreidimensionales Gas von Bosonen der Teilchenzahl \bar{N} . Diese läßt sich berechnen als

$$\bar{N} = \sum_{\mathbf{k}} f^B(\mathbf{k}).$$

\mathbf{k} ist der Wellenvektor der Teilchen. Es gilt die Dispersionsrelation $\varepsilon = \frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m}$. Diese Summe läßt sich in ein Integral überführen. Zeigen Sie, dass sich für die Berechnung der Teilchendichte n das Integral

$$n = (2S + 1) \int_0^\infty f^B(\varepsilon) \mathcal{D}(\varepsilon) d\varepsilon$$

mit der dreidimensionalen Zustanddichte, $\mathcal{D}(\varepsilon) = \frac{1}{4\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \sqrt{\varepsilon}$, ergibt.

- (c) Bestimmen Sie mit Hilfe des Ergebnisses aus (a) die minimal mögliche Temperatur (bei $\mu = 0$). Diese ist die kritische Temperatur der Bose-Einstein Kondensation T_c . Die mittlere Teilchenzahl \bar{N} ist konstant.
Hinweis: $\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{e^x - 1} dx \approx 2.612$.
- (d) Berechnen Sie für $T < T_c$ die Gasdichte $n'(T, T_c)$. Ergeben sich Widersprüche für ein angeschlossenes System und was bedeutet dies ?
- (e) Argumentieren Sie, warum bei sehr kleinen Temperaturen beim Übergang von der Summe zum Integral in (b) ein Fehler entsteht.
- (f) Machen Sie für die Gesamtteilchendichte n den Ansatz $n = n_{\text{cond}} + n'$ mit n_{cond} als der Dichte des Bose-Einstein-Kondensats. Erklären Sie, warum dieser Ansatz den gemachten Fehler korrigiert. Berechnen Sie den Anteil der kondensierten Materie $\frac{n_{\text{cond}}}{n}$.

Aufgabe 25 (10 Punkte): Planck'sche Strahlungsformel

Betrachten Sie ein Photonengas bei konstanter Temperatur in einem Kasten. Die mittlere Energie eines Photons ist $\varepsilon(\mathbf{k}) = \hbar\omega(\mathbf{k}) = c\hbar k$. Außerdem gilt $\mu = 0$. Damit lautet die mittlere Besetzungszahl für Bosonen im Zustand \mathbf{k}, s : $\langle n_{\mathbf{k},s} \rangle = \frac{1}{\exp(\beta\hbar c k) - 1}$.

- (a) Im Zusammenhang mit diesem Problem treten häufig Integrale der Form $\int_0^\infty \frac{x^\alpha}{\zeta^{-1} e^x - 1} dx$ auf. Lösen Sie dieses Integral allgemein, indem Sie die Γ -Funktion $\Gamma(\alpha + 1) = \int_0^\infty e^{-x} x^\alpha dx$ verwenden.
Hinweis: Verwenden Sie die geometrische Reihe. Es gilt weiterhin $\zeta e^{-x} < 1$.

Bitte Rückseite beachten! →

10. Übung TPV WS09/10

(b) Zeigen Sie, dass die innere Energie in der folgenden Form dargestellt werden kann:

$$U(T, V) = V \int_0^\infty u(\omega, T) d\omega$$

und geben Sie die spektrale Energiedichte $u(\omega, T)$ an. Diese Beziehung ist die Planck'sche Strahlungsverteilung.

Hinweis: Nutzen Sie die mittlere Besetzungszahl $\langle n_{\mathbf{k},s} \rangle$.

(c) Zeichnen Sie die Planck'sche Strahlungsverteilung $u(\omega)$ für verschiedene Temperaturen T . Diskutieren Sie den Einfluss von T !

(d) Leiten Sie das Stefan-Boltzmann-Gesetz $U(T, V)$ her, indem Sie die Integration aus Aufgabenteil (b) ausführen.

(e) Bestimmen Sie $\omega_{max}(T)$ bei dem $u(\omega, T)$ maximal ist (Wien'sches Verschiebungsgesetz).
Hinweis: Sie können die auftretende Gleichung numerisch lösen.



Wir wünschen frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins Jahr 2010.

Vorlesung:	<ul style="list-style-type: none">• Dienstags 8:30 Uhr – 10:00 Uhr in EW 203.• Donnerstags 8:30 Uhr – 10:00 Uhr in EW 203.																																			
Tutorien:	<ul style="list-style-type: none">• Di 12 – 14h EW 182• Mi 08 – 10h EW 731• Do 12 – 14h EW 184																																			
Klausur:	<ul style="list-style-type: none">• Donnerstag, den 04.02.2010, von 08:00 – 10:00 Uhr in EW 201.																																			
Scheinkriterien:	<ul style="list-style-type: none">• Mindestens 50% der Übungspunkte.• Bestandene Klausur.• Regelmäßige und aktive Teilnahme in den Tutorien.																																			
Sprechzeiten:	<table><thead><tr><th>Name</th><th>Tag</th><th>Zeit</th><th>Raum</th><th>Tel.</th></tr></thead><tbody><tr><td>Prof. Dr. E. Schöll, PhD</td><td>Mi.</td><td>14:30 - 15:30</td><td>EW 735/36</td><td>23500</td></tr><tr><td>Dr. Kathy Lüdge</td><td>Do.</td><td>15:00 - 16:00</td><td>EW 741</td><td>23002</td></tr><tr><td>Dr. Clive Emary</td><td>Di.</td><td>16:00 - 17:00</td><td>EW 705</td><td>22741</td></tr><tr><td>Stefan Fruhner</td><td>Fr.</td><td>13:30 - 14:30</td><td>EW 627/28</td><td>27681</td></tr><tr><td>Miriam Wegert</td><td>Mi.</td><td>13:00 - 14:00</td><td>EW 279</td><td>24474</td></tr><tr><td>Philipp Zedler</td><td>Mi.</td><td>11:00 - 12:00</td><td>EW 711</td><td>27884</td></tr></tbody></table>	Name	Tag	Zeit	Raum	Tel.	Prof. Dr. E. Schöll, PhD	Mi.	14:30 - 15:30	EW 735/36	23500	Dr. Kathy Lüdge	Do.	15:00 - 16:00	EW 741	23002	Dr. Clive Emary	Di.	16:00 - 17:00	EW 705	22741	Stefan Fruhner	Fr.	13:30 - 14:30	EW 627/28	27681	Miriam Wegert	Mi.	13:00 - 14:00	EW 279	24474	Philipp Zedler	Mi.	11:00 - 12:00	EW 711	27884
Name	Tag	Zeit	Raum	Tel.																																
Prof. Dr. E. Schöll, PhD	Mi.	14:30 - 15:30	EW 735/36	23500																																
Dr. Kathy Lüdge	Do.	15:00 - 16:00	EW 741	23002																																
Dr. Clive Emary	Di.	16:00 - 17:00	EW 705	22741																																
Stefan Fruhner	Fr.	13:30 - 14:30	EW 627/28	27681																																
Miriam Wegert	Mi.	13:00 - 14:00	EW 279	24474																																
Philipp Zedler	Mi.	11:00 - 12:00	EW 711	27884																																