Prof. Dr. Eckehard Schöll, PhD und Dr. Kathy Lüdge
Dr. Clive Emary, Dipl. Phys. Stefan Fruhner, Dipl. Phys. Miriam Wegert, Dipl. Phys. Philipp Zedler

11. Übungsblatt – Theoretische Physik V: Quantenmechanik II

Abgabe: Mo. 18.01.2010 bis 18:00 Uhr, Briefkasten ER-Gebäude und mit ISIS
Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen.

Aufgabe 26 (8 Punkte): *Übergang von der Bloch- zur Boltzmanngleichung*

Die Wechselwirkung von Ladungsträgern im Halbleiter mit einer klassischen Lichtquelle kann im Rahmen der Dichtematrixtheorie mit den Halbleiter-Blochgleichungen beschrieben werden:

$$(1) \qquad \frac{d}{dt} f_{e,h}(k,t) = \frac{1}{i\hbar}\underline{\mu}\cdot\underline{\mathcal{E}}(t)[p^*(k,t) - p(k,t)]$$

$$(2) \qquad \frac{d}{dt} p(k,t) = \frac{1}{i}\omega_p(k)p(k,t) + \frac{1}{i\hbar}\underline{\mu}\cdot\underline{\mathcal{E}}(t)[1 - f_e(k,t) - f_h(k,t)]$$

Hier sind f_e und f_h die Verteilungsfunktionen der Elektronen und Löcher und p die Polarisation, abhängig von der Zeit t und der Wellenzahl k. Das System reagiert mit dem elektrischen Diplolmatrixelement $\underline{\mu}$ auf das externe elektrische Feld $\underline{\mathcal{E}}(t) = \underline{\mathcal{E}}_0(t)e^{i\omega t} + \mathrm{cc}$ und $\omega_p = \frac{E_n - E_{n_0}}{\hbar}$ ist die elektronische Übergangsfrequenz.

a) Lösen Sie die inhomogene Differentialgleichung (2) durch Integration und setzen Sie das Ergebnis

$$(3) \qquad p(k,t) = \int_{t_0}^{t} e^{-i\omega_p(t-t')}\frac{1}{i\hbar}\underline{\mu}\cdot\underline{\mathcal{E}}(t')\left[1 - f_e(k,t') - f_h(k,t')\right]dt'$$

in Gleichung (1) ein. Dadurch eliminieren wir die Polarisation und erhalten eine geschlossene Integro-Differentialgleichung für f_e und f_h, die schwer zu lösen ist.

b) Nehmen Sie nun an, dass sowohl die Amplitude des elektrischen Feldes $\underline{\mathcal{E}}_0(t)$ als auch die Besetzung $f_{e,h}(k,t)$ viel langsamer variieren als die oszillierenden Terme, so dass wir im Argument jeweils t' durch t ersetzen können. Sie erhalten dann

$$(4) \qquad \frac{d}{dt} f_e(k,t) = \frac{1}{\hbar^2}\left(\underline{\mu}\cdot\underline{\mathcal{E}}_0(t)\right)^2[1 - f_e(k,t) - f_h(k,t)]\int_{t_0}^{t} dt' F(t')$$

mit einer oszillierenden Funktion $F(t)$, d.h. eine lineare Differentialgleichung ohne Gedächnis, da die Werte $\frac{d}{dt}f_{e,h}(k,t)$ nicht mehr von früheren Werten $f_{e,h}(k,t')$, $t' < t$, abhängen (Markoff-Näherung).

c) Um das verbleibende Integral abzuschätzen, lassen Sie t_0 gegen $-\infty$ streben und benutzen Sie, dass $\int_{-\infty}^{\infty} e^{iE^{\pm}x} = 2\pi\delta(E^{\pm})$ mit $E^{\pm} = E_n - E_{n_0} \pm \hbar\omega$. Gruppieren Sie dabei überall $e^{\pm i(\omega_p-\omega)(t-t')}$ und vernachlässigen Sie dann alle schnell oszillierenden Beiträge mit $e^{\pm 2i\omega t}$ (Random Phase Approximation, RWA). Dies führt auf die Übergangsrate nach Fermis Goldener Regel:

$$(5) \qquad \frac{d}{dt} f_e(k,t) = \frac{2\pi}{\hbar}\left(\underline{\mu}\cdot\underline{\mathcal{E}}_0(t)\right)^2[1 - f_e(k,t) - f_h(k,t)]\left[\delta(E^+) + \delta(E_-)\right].$$

Aufgabe 27 (12 Punkte): *XY-Modell auf einem Ring*
Das XY-Modell beschreibt die Wechselwirkung mit Kopplungskonstante J zwischen den x- und y-Komponenten benachbarter Spins $\underline{S}_j = (S_j^{(x)}, S_j^{(y)}, S_j^{(z)})$. Wir betrachten N Spins in einem Ring. Ohne äußeres Feld und mit der Konvention $\underline{S}_{N+1} = \underline{S}_1$ (wobei $N > 0$!) lautet der Hamiltonoperator

$$(6) \qquad H_{XY} = -J\sum_{j=1}^{N}\left(S_j^{(x)}S_{j+1}^{(x)} + S_j^{(y)}S_{j+1}^{(y)} + S_j^{(x)}S_{j-1}^{(x)} + S_j^{(y)}S_{j-1}^{(y)}\right).$$

11. Übung TPV WS09/10

Wir führen eine Jordan-Wigner-Transformation durch.

a) Benutzen Sie $S_j^{\pm} = S_j^{(x)} \pm iS_j^{(y)}$, um den Hamiltonoperator zu schreiben als $H_{XY} = -J\sum_j \left(S_j^+ S_{j+1}^- + S_j^+ S_{j-1}^-\right)$. Wir führen die neuen Operatoren $d_j = e^{i\hat{\phi}_j} S_j^-$ und $d_j^+ = S_j^+ e^{-i\hat{\phi}_j}$ ein und wählen $\hat{\phi}_j = \pi \sum_{k=1}^{j-1} \left(\frac{1}{2} + S_k^z\right)$, wobei wir $j > 0$ annehmen. Zeigen Sie, dass $\hat{\phi}_j = \pi \sum_{k=1}^{j-1} d_k^+ d_k$.

b) Zeigen Sie, dass d und d^+ fermionische Antivertauschungsrelationen erfüllen, dass also $\{d_j, d_k^+\} = \delta_{j,k}$ und $\{d_j, k_k\} = \{d_j^+, d_k^+\} = 0$. Vorgehensweise: Begründen Sie zunächst, dass $[S_j^{\pm}, \phi_j] = 0$. Daraus folgen die Antivertauschungsrelationen am gleichen Gitterplatz. Für verschiedene Gitterplätze benutzen wir z.B. das Hadamard-Lemma, um plausibel zu machen, dass $e^{\mp i\pi\hbar S_j^{(z)}} S_j^{\pm} e^{\pm i\pi\hbar S_j^{(z)}} = -S_j^{\pm}$.

c) Bringen Sie den Hamiltonoperator auf die Form $H_{XY} = -J\sum_j \left(d_j^+ d_{j+1} + d_j^+ d_{j-1}\right)$. Wir haben also das XY-Modell auf ein fermionisches Tight-Binding-Modell abgebildet. Wir wissen aus früheren Übungen, dass man es jetzt noch auf die diagonale Form $H_{XY} = -J\sum_k \gamma_k d_k^+ d_k$ bringen kann. Wie lautet dann γ_k?

Vorlesung:
- Dienstags 8:30 Uhr – 10:00 Uhr in EW 203.
- Donnerstags 8:30 Uhr – 10:00 Uhr in EW 203.

Tutorien:
- Di 12 – 14h EW 182
- Mi 08 – 10h EW 731
- Do 12 – 14h EW 184

Klausur:
- Donnerstag, den 04.02.2010, von 08:00 – 10:00 Uhr in EW 201.

Scheinkriterien:
- Mindestens 50% der Übungspunkte.
- Bestandene Klausur.
- Regelmäßige und aktive Teilnahme in den Tutorien.

Literatur zur Lehrveranstaltung:
Siehe auch Semesterapparat in der Physikbibliothek.

- Udo Scherz, Quantenmechanik, Eine kompakte Einführung, Teubner, U Wiesbaden 2005
- Eugen Fick, Einfuehrung in die Grundlagen der Quantentheorie, 6. Auflage, Aula-Verlag, Wiesbaden 1988
- Franz Schwabl, Quantenmechanik 1 & 2, 7. Auflage, Springer-Lehrbuch, Berlin 2007 (auch als ONLINE-Resource)
- Wolfgang Nolting, Grundkurs Theoretische Physik 5/1,2: Quantenmechanik, 5. Auflage, Springer-Lehrbuch, Berlin 2002 (auch als ONLINE-Resource)
- Albert Messiah, Quantenmechanik; Bd. 1 u. 2. Berlin : de Gruyter, 1990
- Heinrich Mitter, Quantentheorie, 2., überarb. Aufl., unveränd. Nachdr. , BI-Wiss.-Verl., 1987

Sprechzeiten:

Name	Tag	Zeit	Raum	Tel.
Prof. Dr. E. Schöll, PhD	Mi.	14:30 - 15:30	EW 735/36	23500
Dr. Kathy Lüdge	Do.	15:00 - 16:00	EW 741	23002
Dr. Clive Emary	Di.	16:00 - 17:00	EW 705	22741
Stefan Fruhner	Fr.	13:30 - 14:30	EW 627/28	27681
Miriam Wegert	Mi.	13:00 - 14:00	EW 279	24474
Philipp Zedler	Mi.	11:00 - 12:00	EW 711	27884