Prof. Dr. Eckehard Schöll, PhD und Dr. Kathy Lüdge
Dr. Clive Emary, Dipl. Phys. Stefan Fruhner, Dipl. Phys. Miriam Wegert, Dipl. Phys. Philipp Zedler

2. Übungsblatt – Theoretische Physik V: Quantenmechanik II

Abgabe: Mo. 02.11.2009 bis 18:00 Uhr, Briefkasten ER-Gebäude und mit ISIS
Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen.

Aufgabe 4 (9 Punkte): *Projektoren*
Eine lineare Abbildung $\hat{P}$ eines Hilbertraums $\mathcal{H}$ in sich selbst heißt (orthogonaler) **Projektor**, wenn sie **idempotent** und **selbstadjungiert** ist, d.h., wenn gilt:

$$\hat{P}^2 = \hat{P} \quad \text{und} \quad \hat{P}^\dagger = \hat{P}.$$

(a) Zeigen Sie: $\hat{Q} = \mathbb{1} - \hat{P}$ ist ein Projektor, wenn $\hat{P}$ ein Projektor ist und es gilt $\hat{P}\hat{Q} = \hat{Q}\hat{P} = 0$.
(b) Berechnen Sie die Eigenwerte eines Projektors.
(c) Seien $\hat{P}, \hat{Q}$ Projektoren, für die gilt: $\hat{P}\hat{Q} = \hat{Q}\hat{P} = \hat{Q}$. Zeigen Sie, dass $\hat{P} - \hat{Q}$ ein Projektor ist.
(d) Seien $\psi, \phi \in \mathcal{H}$ normierte Vektoren und $\hat{P}_1 : \mathcal{H} \to \mathcal{H}; \eta \mapsto \langle\phi, \eta\rangle\phi$ sowie $\hat{P}_2 : \mathcal{H} \to \mathcal{H}; \eta \mapsto \langle\psi, \eta\rangle\psi$. Zeigen Sie, dass diese Abbildungen Projektoren sind und berechnen Sie die Eigenwerte von $\hat{P}_1 + \hat{P}_2$.
(e) Seien $\psi, \phi \in \mathcal{H}$ orthonormale Vektoren. Zeigen Sie, dass die Abbildung $\hat{Q} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}; \eta \mapsto \langle\psi + \phi, \eta\rangle\phi$ idempotent aber *kein* Projektor ist.

Aufgabe 5 (11 Punkte): *Symmetrisches Pöschl-Teller-Potential*
Die gebundenen Zustände eines Teilchens in der eindimensionalen Potentialmulde der Form

$$V(x) = -\frac{U_0}{\cosh^2(\alpha x)} \qquad \text{mit} \qquad U_0 = \frac{s(s+1)}{2m}(\hbar\alpha)^2$$

können analytisch bestimmt werden. Erarbeiten Sie diese Lösungen der zeitunabhängigen Schrödingergleichung $H\psi = E\psi$ und stellen Sie die Energieeigenwerte $E < 0$ in Abhängigkeit von der Potentialtiefe U_0 dar.
Arbeitsprogramm:
(a) Zeigen Sie, dass die Schrödingergleichung durch die Substitution $y = \tanh(\alpha x)$ und die Notation $\epsilon = \sqrt{-2mE/(\hbar\alpha)^2}$ in die Gleichung

$$\frac{d}{dy}\left[(1-y^2)\frac{d\psi}{dy}\right] + \left[s(s+1) - \frac{\epsilon^2}{1-y^2}\right]\psi = 0$$

übergeht.
(b) Führen Sie weiterhin die Funktion w durch $(1-y^2)^{\epsilon/2}w(y) = \psi(y)$ ein und setzen Sie $u = (1-y)/2$. Leiten Sie damit aus der Schrödingergleichung die Differentialgleichung

$$u(1-u)w''(u) + [c - (a+b+1)u]\, w'(u) - abw(u) = 0$$

für die Funktion $w(u)$ ab, wobei $a = \epsilon - s$, $b = \epsilon + s + 1$ und $c = \epsilon + 1$ gelten muss.
(c) Die Lösung dieser Differentialgleichung, die zu einer für $x \to -\infty$ gegen Null konvergierenden Wellenfunktion führt, heißt *hypergeometrische Funktion* ${}_2F_1(a, b, c, u)$. Damit diese Lösung auch zu einer für $x \to +\infty$ gegen Null konvergierenden Wellenfunktion führt, muss $a = \epsilon - s$ eine nichtpositive ganze Zahl sein. Bestimmen Sie mit dieser Kenntnis die möglichen negativen Energieeigenwerte.
(d) Stellen Sie die Energieeigenwerte für ein Elektron der Masse $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31} kg$ und $\alpha = 10^9 m^{-1}$ in einem Bereich $0 < U_0 < 1eV$ dar (*Mathematica*).
(e) Berechnen Sie für $U_0 = 6(\alpha\hbar)^2/m_e$ **alle** normierten Wellenfunktionen zu den existierenden negativen Energieeigenwerten (*Mathematica*).

Hinweis:

- Die Lösung der in (b) angebenen Differentialgleichung läßt sich in *Mathematica* mit dem Befehl DSolve bestimmen:

$$\begin{aligned}\text{In[1]} &= \ \text{DSolve}[u(1-u)w''[u] + (c-(a+b+1)u)w'[u] - abw[u] == 0, w[u], u] \\ \text{Out[1]} &= \{\{w[u] \to C[1]\text{Hypergeometric2F1}[a,b,c,u] \\ &\quad +(-1)^{1-c}u^{1-c}C[2]\text{Hypergeometric2F1}[1+a-c, 1+b-c, 2-c, u]\}\}\,.\end{aligned}$$

- Die hypergeometische Funktion ${}_2F_1$ kann folgendermaßen als Reihe dargestellt werden:

$${}_2F_1(a,b;c;z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k(b)_k}{(c)_k k!} z^k.$$

  Dabei bedeuten:

$$\begin{aligned}(a)_k &= a(a+1)(a+2)\ldots(a+k-1), \\ (b)_k &= b(b+1)(b+2)\ldots(b+k-1), \\ (c)_k &= c(c+1)(c+2)\ldots(c+k-1) \qquad \text{mit} \qquad k \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

- Diese Potenzreihe besitzt den Konvergenzradius $R = 1$.

Vorlesung:

- Dienstags 8:30 Uhr – 10:00 Uhr im EW 203.
- Donnerstags 8:30 Uhr – 10:00 Uhr im EW 203.

Klausur:

- Donnerstag, den 04.02.2010, von 08:00 – 10:00 Uhr in EW 201.

Scheinkriterien:

- Mindestens 50% der Übungspunkte.
- Bestandene Klausur.
- Regelmäßige und aktive Teilnahme in den Tutorien.

Literatur zur Lehrveranstaltung:

Siehe auch Semesterapparat in der Physikbibliothek.

- Udo Scherz, Quantenmechanik, Eine kompakte Einführung, Teubner, U Wiesbaden 2005
- Eugen Fick, Einfuehrung in die Grundlagen der Quantentheorie, 6. Auflage, Aula-Verlag, Wiesbaden 1988
- Franz Schwabl, Quantenmechanik 1 & 2, 7. Auflage, Springer-Lehrbuch, Berlin 2007 (auch als ONLINE-Resource)
- Wolfgang Nolting, Grundkurs Theoretische Physik 5/1,2: Quantenmechanik, 5. Auflage, Springer-Lehrbuch, Berlin 2002 (auch als ONLINE-Resource)
- Albert Messiah, Quantenmechanik; Bd. 1 u. 2. Berlin : de Gruyter, 1990
- Heinrich Mitter, Quantentheorie, 2., überarb. Aufl., unveränd. Nachdr. , BI-Wiss.-Verl., 1987

Sprechzeiten:

Name	**Tag**	**Zeit**	**Raum**	**Tel.**
Prof. Dr. E. Schöll, PhD	Mi.	14:30 - 15:30	EW 735/36	23500
Dr. Kathy Lüdge	Do.	14:30 - 15:30	EW 741	23002
Dr. Clive Emary	Di.	16:00 - 17:00	EW 705	22741
Stefan Fruhner	Fr.	13:30 - 14:30	EW 627/28	27681
Miriam Wegert	Mi.	13:00 - 14:00	EW 279	24474
Philipp Zedler	Mi.	11:00 - 12:00	EW 711	27884