Prof. Dr. Eckehard Schöll, PhD und Dr. Kathy Lüdge
Dr. Clive Emary, Dipl. Phys. Stefan Fruhner, Dipl. Phys. Miriam Wegert, Dipl. Phys. Philipp Zedler

5. Übungsblatt – Theoretische Physik V: Quantenmechanik II

Abgabe: Mo. 23.11.2009 bis 18:00 Uhr, Briefkasten ER-Gebäude und mit ISIS
Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen.

Aufgabe 12 (6 Punkte): *Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren im Wechselwirkungsbild*

Im Wechselwirkungsbild berechnet sich ein beliebiger Operator $\tilde{\hat{\Omega}}(t)$ aus dem entsprechenden (zeitunabhängigen) Operator im Schrödingerbild $\hat{\Omega}$ als

$$\tilde{\hat{\Omega}}(t) = e^{i\hat{H}_0 t}\hat{\Omega}e^{-i\hat{H}_0 t},$$

wobei $\hat{H}_0 = \sum_\nu \epsilon_\nu a_\nu^+ a_\nu$ der ungestörte Hamiltonoperator ist. Die Gleichung können wir auf die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren a_ν^+ und a_ν anwenden. Zur Berechnung eignet sich das Hadamard-Lemma:

$$e^{\hat{X}}\hat{Y}e^{-\hat{X}} = \hat{Y} + [\hat{X},\hat{Y}] + \frac{1}{2!}[\hat{X},[\hat{X},\hat{Y}]] + \frac{1}{3!}[\hat{X},[\hat{X},[\hat{X},\hat{Y}]]] + ...$$

Drücken Sie mit Hilfe dieser Formel $\tilde{a}_\nu^+(t)$ und $\tilde{a}_\nu(t)$ als Funktion von a_ν^+ und a_ν aus, sowohl für fermionische als auch für bosonische Operatoren. Falls die ersten drei Glieder der Reihenentwicklung eine bestimmte Funktion nahelegen, darf diese einfach als Ergebnis angenommen werden.

Aufgabe 13 (7 Punkte): *Fermionische Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren*
Wie in der Vorlesung besprochen, lässt sich ein antisymmetrisierter fermionischer Basiszustand mit N Teilchen ausdrücken als

$$|\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N\rangle = a_{\alpha_1}^+ a_{\alpha_2}^+ ... a_{\alpha_N}^+ |0\rangle,$$

wobei für die fermionischen Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren die Antivertauschungsrelationen

$$\{a_\alpha, a_\beta^+\} = \delta_{\alpha,\beta}, \qquad \{a_\alpha, a_\beta\} = \{a_\alpha^+, a_\beta^+\} = 0,$$

gelten. Im Folgenden sollen die Eigenschaften der Anzahloperatoren $\hat{n}_\alpha = a_\alpha^+ a_\alpha$ untersucht werden.

a) Beweisen Sie die Vertauschungsrelationen

$$\begin{aligned}
[\hat{n}_\alpha, a_\beta] &= -a_\alpha \delta_{\alpha,\beta}, \\
[\hat{n}_\alpha, a_\beta^+] &= a_\alpha^+ \delta_{\alpha,\beta}, \\
[\hat{n}_\alpha, \hat{n}_\beta] &= 0.
\end{aligned}$$

b) Zeigen Sie, dass $(\hat{n}_\alpha)^2 = \hat{n}_\alpha$ gilt.

c) Aus b) folgt, dass $\hat{n}_\alpha$ nur die Eigenwerte 0 oder 1 haben kann. Zeigen Sie:

$$\hat{n}_\alpha |\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N\rangle = \begin{cases} |\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N\rangle & \text{falls } \alpha \in \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Aufgabe 14 (7 Punkte): *Hüpfende Elektronen*
Elektronen im Kristall, die nur schwach von den Rumpfatomen angezogen werden, können so

beschrieben werden, als hüpfen sie von Gitterplatz zu Gitterplatz. Am gebräuchlichsten ist es, nur das Hüpfen zwischen nächsten Nachbarn zu betrachten. Der Hamiltonoperator lautet dann

$$\hat{H} = t \sum_j \left(a_{j+1}^+ a_j + a_j^+ a_{j+1} \right),$$

wobei j die Gitterplätze sind.

a) Diagonalisieren Sie den gegebenen Hamiltonoperator mit Hilfe einer diskreten Fouriertransformation, bringen Sie ihn also auf die Form $\hat{H} = \sum_k \epsilon_k a_k^+ a_k$. Hierzu verwenden wir die Fermionoperatoren a_k der ebenen Wellen mit Impuls k, mit denen gilt: $a_j = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k e^{ik \cdot j} a_k$, wobei N die Anzahl der Gitterplätze ist. Wir benötigen die Relation $\sum_j e^{ij(k-k')} = N \delta_{k,k'}$.

b) Wir können auch das Hüpfen zwischen übernächsten Nachbarn mitnehmen, indem wir schreiben

$$\hat{H} = t \sum_j \left(a_{j+1}^+ a_j + a_j^+ a_{j+1} \right) + t' \sum_j \left(a_{j+2}^+ a_j + a_j^+ a_{j+2} \right).$$

Wie ändert sich jetzt ϵ_k?

Vorlesung:

- Dienstags 8:30 Uhr – 10:00 Uhr in EW 203.
- Donnerstags 8:30 Uhr – 10:00 Uhr in EW 203.

Tutorien:

- Di 12 – 14h EW 182
- Mi 08 – 10h EW 731
- Do 12 – 14h EW 184

Klausur:

- Donnerstag, den 04.02.2010, von 08:00 – 10:00 Uhr in EW 201.

Scheinkriterien:

- Mindestens 50% der Übungspunkte.
- Bestandene Klausur.
- Regelmäßige und aktive Teilnahme in den Tutorien.

Literatur zur Lehrveranstaltung:

Siehe auch Semesterapparat in der Physikbibliothek.

- Udo Scherz, Quantenmechanik, Eine kompakte Einführung, Teubner, U Wiesbaden 2005
- Eugen Fick, Einfuehrung in die Grundlagen der Quantentheorie, 6. Auflage, Aula-Verlag, Wiesbaden 1988
- Franz Schwabl, Quantenmechanik 1 & 2, 7. Auflage, Springer-Lehrbuch, Berlin 2007 (auch als ONLINE-Resource)
- Wolfgang Nolting, Grundkurs Theoretische Physik 5/1,2: Quantenmechanik, 5. Auflage, Springer-Lehrbuch, Berlin 2002 (auch als ONLINE-Resource)
- Albert Messiah, Quantenmechanik; Bd. 1 u. 2. Berlin : de Gruyter, 1990
- Heinrich Mitter, Quantentheorie, 2., überarb. Aufl., unveränd. Nachdr. , BI-Wiss.-Verl., 1987

Sprechzeiten:

Name	Tag	Zeit	Raum	Tel.
Prof. Dr. E. Schöll, PhD	Mi.	14:30 - 15:30	EW 735/36	23500
Dr. Kathy Lüdge	Do.	15:00 - 16:00	EW 741	23002
Dr. Clive Emary	Di.	16:00 - 17:00	EW 705	22741
Stefan Fruhner	Fr.	13:30 - 14:30	EW 627/28	27681
Miriam Wegert	Mi.	13:00 - 14:00	EW 279	24474
Philipp Zedler	Mi.	11:00 - 12:00	EW 711	27884