Prof. Dr. Eckehard Schöll, PhD und Dr. Kathy Lüdge
Dr. Clive Emary, Dipl. Phys. Stefan Fruhner, Dipl. Phys. Miriam Wegert, Dipl. Phys. Philipp Zedler

6. Übungsblatt – Theoretische Physik V: Quantenmechanik II

Abgabe: Mo. 30.11.2009 bis 18:00 Uhr, Briefkasten ER-Gebäude und mit ISIS
Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen.

Aufgabe 15 (6 Punkte): *Erwartungswert eines 2-Teilchenoperators*
Geben Sie an, wann die aus der Vorlesung bekannte Relation

$$\langle\psi|a^+_{\lambda'}a^+_{\mu'}a_\mu a_\lambda|\psi\rangle = \langle a^+_{\mu'}a_\mu\rangle\delta_{\mu'\mu}\langle a^+_{\lambda'}a_\lambda\rangle\delta_{\lambda'\lambda} - \langle a^+_{\mu'}a_\lambda\rangle\delta_{\mu'\lambda}\langle a^+_{\lambda'}a_\mu\rangle\delta_{\lambda'\mu}.$$

gilt und zeigen Sie sie für $|\psi\rangle = a^+_l a^+_k|0\rangle$.

Aufgabe 16 (14 Punkte): *Plasmonen*
In dieser Aufgabe sollen die kollektiven Anregungen des Elektronengases untersucht werden. Dabei soll eine Gleichung zur Bestimmung der Dispersionsrelation $\omega_{PL}(\mathbf{q})$ der Plasmonen gefunden werden.

(a) Stellen Sie die Heisenberg-Bewegungsgleichung für die Operatoren $\langle a^+_{\mathbf{k}-\mathbf{Q},s}a_{\mathbf{k},s}\rangle$, die die elementaren Anregungen beschreiben, auf. Nutzen Sie dazu den Elektronengas-Hamiltonian in 2. Quantisierung:

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k},s}\epsilon_{\mathbf{k},s}a^+_{\mathbf{k},s}a_{\mathbf{k},s} + \frac{1}{2}\sum_{\substack{\mathbf{k_1},\mathbf{k_2},\mathbf{q}\\ s_1,s_2}} V_\mathbf{q} a^+_{\mathbf{k_1}+\mathbf{q},s_1}a^+_{\mathbf{k_2}-\mathbf{q},s_2}a_{\mathbf{k_2},s_2}a_{\mathbf{k_1},s_1}.$$

(b) Um das auftretende Hierachieproblem (berechnete Erwartungswerte $\langle a^+a\rangle$ koppeln an höhere Erwartungswerte $\langle a^+a^+aa\rangle$) zu lösen, führen Sie eine Hartree-Fock-Faktorisierung der 4er-Erwartungswerte durch. Da der Elektronengas-Hamiltonian nicht diagonal ist, gilt: $\langle a^+_1a^+_2a_3a_4\rangle \approx \langle a^+_1a_4\rangle\langle a^+_2a_3\rangle - \langle a^+_1a_3\rangle\langle a^+_2a_4\rangle$.

(c) Vernachlässigen Sie zusätzlich Spinkohärenzen ($\delta_{s,\lambda}$) und nehmen Sie nur Erwartungswerte mit, die elektronische Dichten ($\sigma^{ss}_{\mathbf{k},\mathbf{k}} := \langle a^+_{\mathbf{k},s}a_{\mathbf{k},s}\rangle$) und deren räumliche Fluktuationen ($\sigma^{ss}_{\mathbf{k}-\mathbf{q},\mathbf{k}} := \langle a^+_{\mathbf{k}-\mathbf{q},s}a_{\mathbf{k},s}\rangle$) beschreiben. Damit erhält man folgende Bewegungsgleichung:

$$-i\hbar\partial_t\sigma^{ss}_{\mathbf{k}-\mathbf{Q},\mathbf{k}} = \left(\epsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{Q},s} - \epsilon_{\mathbf{k},s}\right)\sigma^{ss}_{\mathbf{k}-\mathbf{Q},\mathbf{k}} + V_\mathbf{Q}\left(\sigma^{ss}_{\mathbf{k},\mathbf{k}} - \sigma^{ss}_{\mathbf{k}-\mathbf{Q},\mathbf{k}-\mathbf{Q}}\right)\sum_{\mathbf{k_2},s'}\sigma^{s's'}_{\mathbf{k_2}-\mathbf{Q},\mathbf{k_2}}$$
$$+\sum_\mathbf{q} V_\mathbf{q}\left(\sigma^{ss}_{\mathbf{k}-\mathbf{q},\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \sigma^{ss}_{\mathbf{k}-\mathbf{Q}+\mathbf{q},\mathbf{k}-\mathbf{Q}+\mathbf{q}}\right)\sigma^{ss}_{\mathbf{k}-\mathbf{Q},\mathbf{k}}.$$

Deuten Sie die einzelnen Terme.

(d) Die Bewegungsgleichung aus (c) kann im Fourierraum analytisch gelöst werden:

$$1 = \frac{2V_\mathbf{q}}{\hbar}\sum_\mathbf{k}\frac{\sigma^{s,s}_{\mathbf{k}-\mathbf{q},\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \sigma^{s,s}_{\mathbf{k},\mathbf{k}}}{\omega_{\mathrm{PL}}(\mathbf{q}) + \hbar^{-1}(\epsilon^{\mathrm{eff}}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \epsilon^{\mathrm{eff}}_{\mathbf{k}})},$$

wobei es sich bei ϵ^{eff} um die renormalisierte Einteilchenenergie handelt. Um sich dieses Ergebnis zu veranschaulichen, plotten Sie die rechte Seite der Bestimmungsgleichung für einen beliebigen aber festen Wert $\mathbf{q}$ in Abhängigkeit von ω_{PL}. Nehmen Sie dazu den eindimensionalen Spezialfall an. Zusätzlich soll es sich im Nenner um die freien Teilchenenergien handeln ($\epsilon^{\mathrm{eff}}_k = \epsilon_k$). Was bedeutet es also, die transzendente Gleichung zu lösen und welche Lösung ist die kollektive Schwingungsmode?

Vorlesung:
- Dienstags 8:30 Uhr – 10:00 Uhr in EW 203.
- Donnerstags 8:30 Uhr – 10:00 Uhr in EW 203.

Tutorien:
- Di 12 – 14h EW 182
- Mi 08 – 10h EW 731
- Do 12 – 14h EW 184

Klausur:
- Donnerstag, den 04.02.2010, von 08:00 – 10:00 Uhr in EW 201.

Scheinkriterien:
- Mindestens 50% der Übungspunkte.
- Bestandene Klausur.
- Regelmäßige und aktive Teilnahme in den Tutorien.

Literatur zur Lehrveranstaltung:

Siehe auch Semesterapparat in der Physikbibliothek.

- Udo Scherz, Quantenmechanik, Eine kompakte Einführung, Teubner, U Wiesbaden 2005
- Eugen Fick, Einfuehrung in die Grundlagen der Quantentheorie, 6. Auflage, Aula-Verlag, Wiesbaden 1988
- Franz Schwabl, Quantenmechanik 1 & 2, 7. Auflage, Springer-Lehrbuch, Berlin 2007 (auch als ONLINE-Resource)
- Wolfgang Nolting, Grundkurs Theoretische Physik 5/1,2: Quantenmechanik, 5. Auflage, Springer-Lehrbuch, Berlin 2002 (auch als ONLINE-Resource)
- Albert Messiah, Quantenmechanik; Bd. 1 u. 2. Berlin : de Gruyter, 1990
- Heinrich Mitter, Quantentheorie, 2., überarb. Aufl., unveränd. Nachdr. , BI-Wiss.-Verl., 1987

Sprechzeiten:

Name	Tag	Zeit	Raum	Tel.
Prof. Dr. E. Schöll, PhD	Mi.	14:30 - 15:30	EW 735/36	23500
Dr. Kathy Lüdge	Do.	15:00 - 16:00	EW 741	23002
Dr. Clive Emary	Di.	16:00 - 17:00	EW 705	22741
Stefan Fruhner	Fr.	13:30 - 14:30	EW 627/28	27681
Miriam Wegert	Mi.	13:00 - 14:00	EW 279	24474
Philipp Zedler	Mi.	11:00 - 12:00	EW 711	27884