

Prof. Dr. Eckehard Schöll, PhD und Dr. Kathy Lüdge

Dr. Clive Emary, Dipl. Phys. Stefan Fruhner, Dipl. Phys. Miriam Wegert, Dipl. Phys. Philipp Zedler

**8. Übungsblatt – Theoretische Physik V: Quantenmechanik II****Abgabe: Mo. 14.12.2009 bis 18:00 Uhr, Briefkasten ER-Gebäude und mit ISIS***Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen.***Aufgabe 20 (8 Punkte): Reine und gemischte Zustände**Sei  $\hat{\rho}$  Dichteoperator auf einem Hilbert-Raum  $\mathcal{H}$ , also  $\hat{\rho} = \hat{\rho}^*$ ,  $\hat{\rho} > 0$ , und  $\text{Tr } \hat{\rho} = 1$ .  $\hat{\rho}$  beschreibt einen reinen Zustand, wenn  $\hat{\rho}$  in der Form  $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$ ,  $\|\psi\| = 1$ ,  $\psi \in \mathcal{H}$ , geschrieben werden kann.

- (a) Zeigen Sie, dass  $\hat{\rho}$  genau dann rein ist, wenn  $\hat{\rho}^2 = \hat{\rho}$  gilt.
- (b) Zeigen Sie, dass sich jeder Dichteoperator als Summe reiner Zustände schreiben lässt, d.h.  $\hat{\rho} = \sum_i \lambda_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$ , wobei  $\sum_i \lambda_i = 1$  und  $\lambda_i \geq 0$  gilt.
- (c) Zeigen Sie anhand eines Beispiels, dass die Zerlegung eines Dichteoperators in reine Zustände i.A. *nicht eindeutig* ist. (Tipp: mischen Sie zwei nicht-orthogonale reine Zustände).
- (d) Der Erwartungswert einer Observablen ist durch

$$\langle A \rangle = \text{Tr}(\hat{\rho} A)$$

definiert. Motivieren Sie diese Definition indem Sie  $\lambda_i$  in (b) als statistische Wahrscheinlichkeit für den Zustand  $|\psi_i\rangle\langle\psi_i|$  auffassen. Warum ist  $\langle A \rangle$  unabhängig von der gewählten Zerlegung von  $\hat{\rho}$  in reine Zustände?

- (e) Zeigen Sie mittels einer Zerlegung in reine Zustände, dass  $\hat{\rho}(t)$  die LIOUVILLE-Gleichung

$$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{\rho}(t) = [\mathbf{H}, \hat{\rho}(t)]$$

erfüllt, wobei  $\mathbf{H}$  der Hamiltonoperator ist. Worin liegt der Unterschied zur Heisenbergschen Bewegungsgleichung?**Aufgabe 21 (12 Punkte): Rabioszillationen**Betrachten Sie ein Elektron in einem quantenmechanischen Zwei-Niveau-System. Dieses kann sich entweder im Grundzustand  $V$  aufhalten oder aber den angeregten Zustand  $C$  einnehmen. Die optische Anregung geschieht über das externe zeitabhängige Potential  $V = \vec{\mu} \cdot \vec{E}(t)$ . Für die Elektronenbesetzungswahrscheinlichkeiten gilt  $f_C^e + f_V^e = 1$ . Die Dynamik des Systems wird durch die Halbleiter-Bloch-Gleichungen beschrieben:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f_C^e &= -i\Omega_p(p - p^*) = +2 \text{Im}[\Omega_p p], \\ \frac{d}{dt} p &= -i\omega_p p - i\Omega_p(f_C^e - f_V^e). \end{aligned}$$

Dabei wurden die Rabifrequenz  $\Omega_p(t) = \frac{1}{\hbar} \vec{\mu} \cdot \vec{E}(t)$  und  $\omega_p = \frac{1}{\hbar}(E_C - E_V)$  definiert.**Bitte Rückseite beachten! →**

8. Übung TPV WS09/10

(a) Interpretieren Sie die auftretenden Größen physikalisch.

(b) Sei die Einhüllende  $\tilde{\Omega}(t)$  der Rabi-Frequenz durch  $\Omega_p(t) = \frac{1}{2} (\tilde{\Omega}(t)e^{-i\omega_T t} + \tilde{\Omega}^*(t)e^{i\omega_T t})$  definiert, wobei  $\omega_T$  gerade die Frequenz der Trägerschwingung der Anregung ist. Desweiteren sei  $\tilde{p} = p e^{i\omega_T t}$ . Schreiben die Bewegungsgleichung in diesen langsam rotierenden Größen und führen Sie die sogenannte Rotating-Wave-Approximation (RWA) durch, indem Sie Rotationen mit doppelter Lichtfrequenz streichen. Mit der Verstimmungsfrequenz  $\delta = \omega_T - \omega_p$  führt dies zu:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \tilde{p} &= i \tilde{p} \delta + \frac{i}{2} \tilde{\Omega}(t) (1 - 2f_C^e), \\ \frac{d}{dt} f_C^e &= \text{Im} [\tilde{\Omega}^*(t) \tilde{p}]. \end{aligned}$$

(c) Betrachten Sie den Fall resonanter Anregung ( $\delta = 0$ ) mit reellem  $\tilde{\Omega}(t)$ :

1. Verifizieren Sie, dass  $\tilde{p}(t) = \frac{i}{2} \sin \theta(t)$  mit der Pulsfläche  $\theta(t) = \int_{-\infty}^t \tilde{\Omega}(t') dt'$  eine Lösung des Differentialgleichungssystems ist und geben Sie  $f_C^e(t)$  an.
2. Diskutieren Sie die Lösung ausführlich. In welchem Zustand befindet sich das System, wenn die Pulsfläche  $\theta$  gerade die Werte  $\frac{\pi}{2}, \pi$  und  $2\pi$  annimmt? [Anfangsbedingung hier und für den folgenden Aufgabenteil:  $f_C^e(-\infty) = \tilde{p}(-\infty) = 0$ ].
3. Bestimmen Sie für einen Puls der Form

$$\tilde{\Omega}(t) = \begin{cases} \frac{A\pi}{2\tau} \cos \frac{\pi t}{\tau} & \text{für } -\tau/2 < t < \tau/2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

die analytische Lösung.

Plotten Sie  $f_C^e(t)$  und  $\text{Im}[\tilde{p}(t)]$  im Bereich von  $t = [-10ps, 10ps]$  für  $\tau = 5ps$  und  $A = 3\pi$ .

<b>Tutorien:</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Di 12 – 14h EW 182</li> <li>• Mi 08 – 10h EW 731</li> <li>• Do 12 – 14h EW 184</li> </ul>																																			
<b>Klausur:</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Donnerstag, den 04.02.2010, von 08:00 – 10:00 Uhr in EW 201.</li> </ul>																																			
<b>Scheinkriterien:</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Mindestens 50% der Übungspunkte.</li> <li>• Bestandene Klausur.</li> <li>• Regelmäßige und aktive Teilnahme in den Tutorien.</li> </ul>																																			
<b>Sprechzeiten:</b>	<table border="1"> <thead> <tr> <th>Name</th> <th>Tag</th> <th>Zeit</th> <th>Raum</th> <th>Tel.</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Prof. Dr. E. Schöll, PhD</td> <td>Mi.</td> <td>14:30 - 15:30</td> <td>EW 735/36</td> <td>23500</td> </tr> <tr> <td>Dr. Kathy Lüdge</td> <td>Do.</td> <td>15:00 - 16:00</td> <td>EW 741</td> <td>23002</td> </tr> <tr> <td>Dr. Clive Emary</td> <td>Di.</td> <td>16:00 - 17:00</td> <td>EW 705</td> <td>22741</td> </tr> <tr> <td>Stefan Fruhner</td> <td>Fr.</td> <td>13:30 - 14:30</td> <td>EW 627/28</td> <td>27681</td> </tr> <tr> <td>Miriam Wegert</td> <td>Mi.</td> <td>13:00 - 14:00</td> <td>EW 279</td> <td>24474</td> </tr> <tr> <td>Philipp Zedler</td> <td>Mi.</td> <td>11:00 - 12:00</td> <td>EW 711</td> <td>27884</td> </tr> </tbody> </table>	Name	Tag	Zeit	Raum	Tel.	Prof. Dr. E. Schöll, PhD	Mi.	14:30 - 15:30	EW 735/36	23500	Dr. Kathy Lüdge	Do.	15:00 - 16:00	EW 741	23002	Dr. Clive Emary	Di.	16:00 - 17:00	EW 705	22741	Stefan Fruhner	Fr.	13:30 - 14:30	EW 627/28	27681	Miriam Wegert	Mi.	13:00 - 14:00	EW 279	24474	Philipp Zedler	Mi.	11:00 - 12:00	EW 711	27884
Name	Tag	Zeit	Raum	Tel.																																
Prof. Dr. E. Schöll, PhD	Mi.	14:30 - 15:30	EW 735/36	23500																																
Dr. Kathy Lüdge	Do.	15:00 - 16:00	EW 741	23002																																
Dr. Clive Emary	Di.	16:00 - 17:00	EW 705	22741																																
Stefan Fruhner	Fr.	13:30 - 14:30	EW 627/28	27681																																
Miriam Wegert	Mi.	13:00 - 14:00	EW 279	24474																																
Philipp Zedler	Mi.	11:00 - 12:00	EW 711	27884																																